<u>Satz 8</u> Eine Distribution mit kompaktem Träger hat endliche Ordnung. (Kapitel 3 / Abschnitt 3.2)

<u>4.4</u>

<u>Satz 9</u> Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $0 \in \Omega$. Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ mit $\operatorname{supp}(T) = \{0\}$. Dann lässt sich T auf genau eine Art als endliche Linearkombination von Ableitungen der δ-Distribution schreiben.

5. Kapitel Faltungen

5.1 Einige formale Umformungen

(eine neue Bezeichnung $\check{\partial}^\alpha = (-1)^{|\alpha|}\partial^\alpha$ bzw $\check{D}^\alpha = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha$)

<u>$h \in \mathbb{R}^n$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$</u>

(1) $(\partial^\alpha \varphi)^\vee = \check{\partial}^\alpha \check{\varphi}$

(2) $(\tau_h \varphi)^\vee = \tau_{-h}\check{\varphi}$

(3) $\partial^\alpha(\tau_h \varphi) = \tau_h(\partial^\alpha \varphi)$

(4) $u * v = v * u$ (u, v Funktionen / etwa

(5) $(u * v)^\vee = \check{u} * \check{v}$ $u \in C^\infty_0(\mathbb{R}^n), v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$)

(6) $\tau_h(u * v) = (\tau_h u) * v = u * (\tau_h v)$

(7) $\partial^\alpha(u * v) = (\partial^\alpha u) * v = u * (\partial^\alpha v)$

<u>Zusätzlich $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$</u>

(8) $(D^\alpha T)^\vee = \check{D}^\alpha \check{T}$

(9) $(\tau_h T)^\vee = \tau_{-h}\check{T}$

(10) $D^\alpha(\tau_h T) = \tau_h(D^\alpha T)$. (siehe <u>3.5</u>, <u>3.6</u>)

5.2 Faltung: Distribution * Testfunktion

Definition: Zu $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ wird die Funktion $T*\varphi$ wie folgt definiert: $(T*\varphi)(x) := T(\tau_x \check{\varphi})$, $x \in \mathbb{R}^n$
(vgl. 9./10. Übung, jeweils Aufgabe 2)

Bemerkungen/Beispiele

1) Wegen $(\tau_x \check{\varphi})(y) = \varphi(x-y)$ wird anstelle von $T(\tau_x \check{\varphi})$ auch geschrieben $T(\varphi(x-\cdot))$ $(= T((\tau_x \check{\varphi})(\cdot)))$.
2) $(T*\check{\varphi})(0) = T(\varphi)$
3) $\delta_y * \varphi = \tau_y \varphi$, also auch ($y=0$) $\delta * \varphi = \varphi$

Satz 1 $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in \mathbb{Z}^n_+$. Es gelten

a) $\tau_h(T*\varphi) = (\tau_h T)*\varphi = T*(\tau_h \varphi) \quad \forall h \in \mathbb{R}^n$
b) $T*\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha(T*\varphi) = T*(\partial^\alpha \varphi) = (\partial^\alpha T)*\varphi$
c) $\operatorname{supp}(T*\varphi) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)$

Satz 2 Es sei $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Die Zuordnung $\varphi \to T*\varphi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist linear und stetig und (Satz 1 a)) mit Translationen vertauschbar.

noch Literatur

[17] Cristescu/Marinescu Applications of the theory of distributions (Wiley 1973)

[18] Constantinescu Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik (Teubner Studienbücher 1973)