Satz 3: Es seien $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.
Es gilt $(T*\varphi)*\psi = T*(\varphi*\psi)$.
(Beim Beweis wird zur Approximation des Integrals $(\varphi*\psi)(x)$ eine Riemannsche Summe verwendet. Diese konvergiert in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gegen $\varphi*\psi$.)

Satz 4 Es seien ρ_ε die Testfunktionen aus Kapitel 2, Abschnitte 2.2 und 2.7: $\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$, $\rho_\varepsilon \geq 0$, $\operatorname{supp}\rho_\varepsilon = \overline{B(0,\varepsilon)}$.
Es gelten:
1. Mit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ hat man $\varphi*\rho_\varepsilon \to \varphi$ $(\varepsilon \to 0)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$
2. Mit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ hat man $T*\rho_\varepsilon \to T$ $(\varepsilon \to 0)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Satz 5 (vgl. Satz 2)
Es sei $L: \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ eine lineare stetige Abbildung, die $L\tau_x = \tau_x L$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Dann gibt es genau eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $L\varphi = T*\varphi$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Für $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ kann genau wie vorher definiert werden: $(T*\varphi)(x) := T(\tau_x \check{\varphi})$.
Es gelten die analogen Eigenschaften und Regeln wie oben (siehe Sätze 1, 2, 3). Wir stellen sie im folgenden Satz zusammen:

Satz 6 Es seien $T \in \mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$. Dann gelten:
a) $\tau_x(T*\varphi) = (\tau_x T)*\varphi = T*(\tau_x\varphi)$, $x \in \mathbb{R}^n$
b) $T*\varphi \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\partial^\alpha(T*\varphi) = (\partial^\alpha T)*\varphi = T*(\partial^\alpha\varphi)$
c) $\varphi \to T*\varphi$ ist eine lineare und stetige Abbildung von $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ nach $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$.

(weiter mit Satz 6)

Gilt $\psi \in \mathcal{D}$, so hat man zusätzlich:

d) $T * \psi \in \mathcal{D}$

e) $T * (\varphi * \psi) = (T * \varphi) * \psi = (T * \psi) * \varphi$.

5.3 Faltung zwischen Distributionen

Def: Von den Distributionen S und T habe eine kompakten Träger. $S * T$ ist dann die durch

$$(S * T) * \varphi := S * (T * \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

definierte Distribution. Also

$S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S * T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ mit $(S * T) * \varphi = S * (T * \varphi)$.

Bemerkung: $(S * T)(\varphi) = S(\check{T} * \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Beispiel: $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: $T * \delta = T$.

Satz 7 $S, T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und wenigstens eine dieser Distributionen habe kompakten Träger. Es gelten:

a) $T * S = S * T$, b) $\operatorname{supp}(T * S) \subset \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(S)$

c) $S * (T * V) = (S * T) * V$ mit $S, T, V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ und zwei dieser Distribution sind aus $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^n)$

d) $D^\alpha T = (D^\alpha \delta) * T, \quad D^\alpha (T * S) = (D^\alpha T) * S = T * (D^\alpha S)$.

---

weiter mit Literatur:

[19] Rudin : Functional Analysis (Mc-Graw-Hill 1985)

[20] Preuß, Bleyer, Preuß: Distributionen und Operatoren. Ihre Anwendung in Naturwissenschaft und Technik (Springer 1985)