6. Kapitel Die Fouriertransformation. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}'$.

6.1 1) Definition und Satz 1

Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ wird durch $(\mathcal{F}f)(\xi)\,(=\hat{f}(\xi)) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} f(x)\,dx$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, die Fouriertransformierte $\mathcal{F}f$ $(=\hat{f})$ von f definiert. Es ist $\hat{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ stetig und beschränkt: $|\hat{f}(\xi)| \le \|f\|_{L^1}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$.
Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \to C^0_B(\mathbb{R}^n)$ (stetig, beschränkt) ist ein linearer stetiger Operator: $\|\mathcal{F}f\|_\infty \le \|f\|_{L^1}$.

---

2) Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen und Aussagen:

$x, k \in \mathbb{R}^n$: $e_k(x) := e^{ix\cdot k}$

Es gelten:
$$e_k(x+y) = e_k(x)\,e_k(y) \qquad x, y \in \mathbb{R}^n$$
$$e_k(-x) = e_{-k}(x) = e_{-x}(k)$$
$$e_k(\lambda x) = e_{\lambda k}(x) \qquad , \lambda \in \mathbb{C}$$

Hiermit kann man schreiben: $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,e_{-\xi}(x)\,dx = (f * e_\xi)(0)$

Wir erinnern an (Abschnitt 3.5) $(\vartheta_\lambda f)(x) = f(\lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Satz 2 $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $k \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$. Es gelten:
a) $\widehat{\tau_k f} = e_{-k}\hat{f}$, b) $\widehat{e_k f} = \tau_k \hat{f}$, c) $\widehat{\vartheta_\lambda f} = \frac{1}{\lambda^n}\vartheta_{\frac{1}{\lambda}}\hat{f}$

6.2 Der Raum $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (Ü. 4 A3 / 10. Ü A1 / 11. Ü A4)

Definition: 1) $\varphi \in \mathcal{S} \iff \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ und für alle Multiindizes α, β gilt: $p_{\alpha\beta}(\varphi) := \sup_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta \varphi(x)| < \infty$

2) $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{S}$, $\varphi \in \mathcal{S}$: (Konvergenz in $\mathcal{S}$)

$(\varphi_j \to \varphi \ (j\to\infty)$ <u>in $\mathcal{S}$</u>$) \iff (p_{\alpha\beta}(\varphi_j - \varphi) \to 0 \ (j\to\infty) \ \forall \alpha, \beta)$

Wir verwenden die Bezeichnung $(M_j\varphi)(x) := x_j\varphi(x)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Satz 3

a) $\partial^\alpha : \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ ist stetig für jeden Multiindex α

b) $M_j : \mathcal{S}\to\mathcal{S}$ ist stetig für $j=1,\dots,n$

c) $\varphi,\psi\in\mathcal{S} \to \varphi\psi\in\mathcal{S}$

d) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dicht in $\mathcal{S}$, $\mathcal{S}$ dicht in $\mathcal{E}$.

e) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p<\infty$.

Wir verwenden die Bezeichnungen: $D_j = -i\partial_j$, $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha$
und $M^\alpha = M_1^{\alpha_1}M_2^{\alpha_2}\dots M_n^{\alpha_n}$.

Satz 4: a) $\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$, $\mathcal{F}$ ist stetig,

b) $\widehat{D^\alpha\varphi} = M^\alpha\hat{\varphi}$, $\varphi\in\mathcal{S}$, $\alpha\in\mathbb{Z}^n_+$,

c) $\widehat{M^\alpha\varphi} = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha\hat{\varphi}$, $\varphi\in\mathcal{S}$.

6.3 Der Umkehrsatz

Satz 5 Es sei $f(x) = \exp(-\frac{1}{2}\|x\|^2)$, $x\in\mathbb{R}^n$.

Es gelten: $\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f(\xi)$ und $\int_{\mathbb{R}^n}\hat{f}(\xi)d\xi = (2\pi)^n$.

Satz 6 Für $\varphi\in\mathcal{S}$ gilt: $\hat{\hat{\varphi}} = (2\pi)^n\check{\varphi}$.

Satz 7 (1. Version des Fourierschen Umkehrsatzes)

$\mathcal{F}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ ist bijektiv, linear, stetig.

$\mathcal{F}^{-1}:\mathcal{S}\to\mathcal{S}$ ist bijektiv, linear, stetig.

Es gilt $\mathcal{F}^{-1}(\hat{\varphi})(x) = \varphi(x) = (2\pi)^{-n}\hat{\varphi}(-x)$, $x\in\mathbb{R}^n$, $\varphi\in\mathcal{S}$.

Satz 8 (Umkehrsatz 2. Version)

Es seien $f, \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $f_0(y) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\, e_y(x)\, dx$, $y \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt $f_0(x) = f(x)$ für fast alle $x \in \mathbb{R}^n$.

Satz 9 Für $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ gelten:

(9.1) $\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\, \psi \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, \hat{\psi}\, dx$

(9.2) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, \overline{\psi}\, dx = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}\, \overline{\hat{\psi}}\, dx$ (Parsevalsche Gleichung)

(9.3) $\widehat{\varphi * \psi} = \hat{\varphi}\, \hat{\psi}$

(9.4) $\widehat{\varphi \psi} = (2\pi)^{-n}\, \hat{\varphi} * \hat{\psi}$

Bemerkungen: 1) (9.3) gilt auch für $\varphi, \psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (siehe auch (2.6))

2) Aus $\varphi * \psi = 0$ folgt nicht: $\varphi = 0$ oder $\psi = 0$.

3) Aus $\varphi \in \mathcal{S}$ und $\varphi * \varphi = 0$ folgt: $\varphi = 0$.