6.4 $\mathcal{S}'$. Der Raum der temperierten Distributionen

1. $T \in \mathcal{S}' \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ ist lineares Funktional und stetig in folgendem Sinn: Aus $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{S}$ und $\varphi_j \to 0$ $(j \to \infty)$ in $\mathcal{S}$ folgt: $T(\varphi_j) \to 0$ $(j \to \infty)$.

Satz 10 (vgl Satz 3 in 3.3 und Satz 5 in 4.3)

$T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ sei linear. Dann gilt:

$T \in \mathcal{S}' \Longleftrightarrow$ es gibt eine Konstante $C > 0$ und eine Zahl $N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq N} p_{\alpha\beta}(\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{S},$$

gilt.

2. Es gilt $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ in dem folgenden Sinn:
$T \in \mathcal{S}' \to T|_{\mathcal{D}} \in \mathcal{D}'$

Da $\mathcal{D}$ in $\mathcal{S}$ dicht liegt, kann $\mathcal{S}'$ mit einem Teilraum von $\mathcal{D}'$ identifiziert werden: Die Funktionale aus $\mathcal{S}'$ sind spezielle Distributionen, die temperierten Distributionen. Das sind genau die Distributionen, die sich stetig auf $\mathcal{S}$ fortsetzen lassen.

3. $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$: $T \in \mathcal{E}' \to T|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'$
(vgl auch Satz 7 in 4.3)

4. $\delta \in \mathcal{S}'$.

5. Satz 11

In den folgenden Fällen definiert u eine (reguläre) temperierte Distribution I_u durch $I_u(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} u\varphi\, dx$, $\varphi \in \mathcal{S}$:

a) $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, und es gibt ein $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, so dass

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|u(x)|}{(1+\|x\|^2)^m}\, dx < \infty \quad \text{gilt}$$

b) $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \geq 1$ $\quad$ (" $L^p \subset \mathcal{S}'$ ")

c) u ist ein Polynom.

6. Konvergenz in $\mathcal{S}'$ (vgl. 3.4)

Def: Eine Folge $(T_j)_j$ temperierter Distributionen konvergiert (in $\mathcal{S}'$) gegen $T \in \mathcal{S}'$, falls $T_j(\varphi) \to T(\varphi)$ $(j \to \infty)$ für alle $\varphi \in \mathcal{S}$ gilt.

Lemma
1) $T \in \mathcal{S}' \longrightarrow D^\alpha T \in \mathcal{S}'$
2) $D^\alpha : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ ist stetig
3) $\mathcal{S}' \subsetneq \mathcal{D}'$

6.5 Die Fouriertransformation in $\mathcal{S}'$

1. Für $T \in \mathcal{S}'$ wird $\mathcal{F}(T) : \mathcal{S} \to \mathbb{C}$ so definiert

$$\mathcal{F}(T)(\varphi) := T(\hat{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{S}.$$

2. Hierdurch wird eine lineare stetige Abbildung

$$\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$$

gegeben, die

$$\mathcal{F}|_{L^1} = \mathcal{F} \quad \text{erfüllt.}$$

$\mathcal{F}$ ist also eine Fortsetzung der auf L^1 gegebenen ~~Fouriertransformation~~ auf $\mathcal{S}'$! $\mathcal{F}(T)$ heißt die Fouriertransformierte von T und wird ab hier ebenfalls durch $\mathcal{F}(T)$ bzw $\hat{T}$ bezeichnet.

Also:

Für $T \in \mathcal{S}'$ ist $\hat{T} \in \mathcal{S}'$ durch $\hat{T}(\varphi) := T(\hat{\varphi})$, $\forall \varphi \in \mathcal{S}$ gegeben.

Satz 11 : $\mathcal{F}: \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist linear, stetig, bijektiv.
Es gilt $\hat{\hat{T}} = (2\pi)^n \check{T}$ für $T \in \mathcal{S}'$

Beispiel: $\hat{1} = (2\pi)^n \delta$

$\hat{\delta} = 1$

Satz 12 $T \in \mathcal{S}'$, $h \in \mathbb{R}^n$, $j \in \mathbb{N}$. Es gelten:

1) $\widehat{\tau_h T} = e_{-h} \hat{T}$, 2) $\widehat{e_h T} = \tau_h \hat{T}$, 3) $\widehat{\partial_j T} = M_j \hat{T}$, 4) $\partial_j \hat{T} = -\widehat{M_j T}$

Beispiele: 1) $\widehat{D^\alpha \delta} = x^\alpha$, 2) $\widehat{x^\alpha} = (-1)^{|\alpha|} (2\pi)^n D^\alpha \delta$ $(\alpha \in \mathbb{Z}^n_+)$

3) $\widehat{\delta_{x_0}} \left(= e^{-i x_0 \cdot \xi}\right) = e_{-x_0}$, 4) $\widehat{e_\xi} = (2\pi)^n \delta_\xi$

5) $\widehat{\mathrm{sign}(x)} := -2i\, pV(\frac{1}{\xi})$, 6) $\hat{H} = \pi\delta - i\, pV(\frac{1}{\xi})$

7) $\widehat{pV(\frac{1}{x})} = -i\pi\, \mathrm{sign}(x)$