2. Kapitel Grundlegendes. Bezeichnungen. Definitionen

2.1 Multiindizes (Taylorformel. Leibniz Regel)

1. $\mathbb{Z}_+ = \{z \in \mathbb{Z},\ z \geq 0\}$ $(= \mathbb{N} \cup \{0\})$.

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ heißt Multiindex

Bezeichnungen und Definitionen in diesem Zusammenhang:

$\beta, \alpha \in \mathbb{Z}_+^n$: $\quad |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$.

$x \in \mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \dots, x_n)$, $\quad \partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$:

$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$; $\partial^\alpha := \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \dots \partial_n^{\alpha_n}$,

$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!$, $\quad \binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \cdots \binom{\alpha_n}{\beta_n} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!}$

$\alpha \leq \beta \overset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow} \alpha_j \leq \beta_j \quad (j = 1, \dots, n)$

2. $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $x, x_0 \in \mathbb{R}^n$. $f(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha (x - x_0)^\alpha$.

Es gilt $\quad c_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x_0)$.

3. $x, y \in \mathbb{R}^n$; $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$\underline{(x+y)^\alpha = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} x^\beta y^{\alpha-\beta}} = \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} x^\beta y^\gamma$$

Binomischer Satz

4. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es gilt

$$\underline{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^\alpha}$$

Multinomialsatz

5. Leibniz Regel: $u, v \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}_+^n$:

$$\underline{\partial^\alpha (uv) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta u\, \partial^{\alpha-\beta} v} = \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} \partial^\beta u\, \partial^\gamma v$$

6. Taylorformel: $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$f(x+y) = \sum_{|\alpha|<k} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(x) y^\alpha + \sum_{|\alpha|=k} k \frac{y^\alpha}{\alpha!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \partial^\alpha f(x+ty)\,dt$$

2.2 Einige Bezeichnungen.

1. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bezeichnet eine offene Menge. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$f \in C^k(\Omega) \iff f: \Omega \to \mathbb{C}$ und $\partial^\alpha f(x)$ existiert auf Ω für alle $\alpha: |\alpha| \leq k$. $\partial^\alpha f$ ist stetig auf Ω für alle $\alpha: |\alpha| \leq k$.

$f \in C^k(\overline{\Omega}) \iff f \in C^k(\Omega)$ und $\partial^\alpha f$ ist für alle $\alpha: |\alpha| \leq k$ stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbar.

$$C^\infty(\Omega) := \bigcap_{k=0}^{\infty} C^k(\Omega), \quad C^0(\Omega) = C(\Omega).$$

2. $f \in C(\Omega)$

(der Träger von f =) $\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in \Omega \,/\, f(x) \neq 0\}}^{\Omega}$

d.h.: $x_0 \in \operatorname{supp}(f) \iff$ es gibt eine Folge $(x_n) \subset \Omega$ mit $f(x_n) \neq 0$ $(\forall n)$ und $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$.

$\iff$ in jeder Umgebung von x_0 gibt es ein $y \in \Omega$ mit $f(y) \neq 0$.

$x_0 \notin \operatorname{supp}(f) \iff$ es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $x \in \Omega$ mit $\|x - x_0\| < \varepsilon$ $f(x) = 0$ gilt.

3. $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt kompakt, falls M beschränkt und abgeschlossen ist.

Satz 1 (Borelsche Eigenschaft kompakter Mengen)
$M \subset \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

Satz 2

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $M \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ mit: $\overline{U}$ ist kompakt und erfüllt $M \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$.

4. $\underline{C_0^k(\Omega)}$: $f \in C_0^k(\Omega) \Leftrightarrow f \in C^k(\Omega)$ und $\operatorname{supp}(f)$ ist kompakt in Ω.

$$\underline{C_0^\infty(\Omega)} := \bigcap_{k=0}^{\infty} C_0^k(\Omega).$$

Für $C_0^\infty(\Omega)$ wird auch $\underline{\mathcal{D}(\Omega)}$ geschrieben. Die Elemente von $\mathcal{D}(\Omega)$ heißen auch Testfunktionen.

Satz 3 (Existenz von Testfunktionen) (siehe auch 1. Übblatt)

Es seien $\delta > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann gibt es eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ mit: $\varphi \geq 0$, $\varphi(x_0) > 0$,
$\operatorname{supp}(\varphi) = \overline{B(x_0,\delta)} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| \leq \delta\}$.

(Mit $f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$ genügt

$$\varphi(x) := f\left(1 - \left\|\frac{x - x_0}{\delta}\right\|^2\right)$$ den Anforderungen.)

Im folgenden werden wir durch ρ_α $(\alpha > 0)$ die Funktion bezeichnen:

$$\rho_\alpha(x) := \frac{1}{\alpha^n}\rho\left(\frac{x}{\alpha}\right) \text{ mit } \rho(x) := \frac{f(1 - \|x\|^2)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(1 - \|x\|^2)\,dx}.$$

Es gelten: $\rho_\alpha \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\rho_\alpha \geq 0$, $\rho_\alpha(0) > 0$, $\operatorname{supp}\rho_\alpha = \overline{B(0,\alpha)}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\alpha(x)\,dx = 1 \quad \text{für alle } \alpha > 0.$$