<u>Satz 4</u> Aus $f, g \in C(\Omega)$ und $\int_\Omega f\varphi\,dx = \int_\Omega g\varphi\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ folgt: $f = g$.

2.5. $L^1(\Omega), L^1_{loc}(\Omega)$

(Nummerierung ab hier wie in der Vorlesung!)

$f \in L^1(\Omega) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} f: \Omega \to \mathbb{C}$ und f ist über Ω absolut integrabel: $\|f\|_{1,\Omega} := \int_\Omega |f(x)|\,dx < \infty$.

Für $f, g \in L^1(\Omega)$ bedeutet "$f = g$": $\int_\Omega |f(x) - g(x)|\,dx = 0$

oder: $f(x) = g(x)$ für fast alle $x \in \Omega$

$f \in L^1_{loc}(\Omega) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} f$ ist über jede kompakte Menge $M \subset \Omega$ absolut integrierbar.

Für $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ bedeutet "$f = g$": $\int_M |f(x) - g(x)|\,dx = 0$

für jede kompakte Menge $M \subset \Omega$.

Es gilt $\underline{L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)}$.

Es gelten: 1) <u>$\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $L^1(\Omega)$</u>:
Zu $u \in L^1(\Omega)$ gibt es eine Folge $(u_j)_j \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\|u_j - u\|_{1,\Omega} \to 0 \quad (j \to \infty)$.

2) <u>$\mathcal{D}(\Omega)$ liegt dicht in $L^1_{loc}(\Omega)$</u> in folgendem Sinn:
Zu $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $M \subset \Omega$ kompakt gibt es eine Folge $(u_j)_j \subset \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\|u_j - u\|_{1,M} \to 0 \quad (j \to \infty)$.

<u>Beispiel</u>: $f(x) = \|x\|^{-s} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $s < n$

$\notin L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ für $s \geq n$

Für $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ wird definiert:

$\operatorname{supp}(f) = \bigcap \{A$ abgeschlossen in Ω und $\int_\Omega |f(x)|dx = \int_A |f(x)|dx\}$

<u>Satz 5</u> Aus $f, g \in L^1_{loc}(\Omega)$ und $\int_\Omega f\varphi\, dx = \int_\Omega g\varphi\, dx \;\; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

folgt: $f = g$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

2.6 Faltung. Glättung

<u>Def</u>: u, v seien auf dem $\mathbb{R}^n$ definierte Funktionen, für die

$$(u * v)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)\, v(y)\, dy \quad , x \in \mathbb{R}^n$$

existiert.

<u>Lemma 1</u>

a) $u * v \in C^0(\mathbb{R}^n)$ für $u \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$, $v \in C^0(\mathbb{R}^n)$

b) $u * v = v * u$

c) $\int_{\mathbb{R}^n} (u * v)(x)\phi(x)\, dx = \iint_{\mathbb{R}^{2n}} u(x) v(y) \phi(x+y)\, d(x,y)$,

u, v wie unter a), $\phi \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$

d) $u, v, w \in C^0(\mathbb{R}^n)$ und zwei der Funktionen haben kompakten Träger: $(u * v) * w = u * (v * w)$

e) $\int_{\mathbb{R}^n} (u * v)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u\, dx \int_{\mathbb{R}^n} v\, dx$, $u, v \in C^0_0(\mathbb{R}^n)$

f) $\operatorname{supp}(u * v) \subset \operatorname{supp}(u) + \operatorname{supp}(v)$

$(= \{x + y \,/\, x \in \operatorname{supp}(u), y \in \operatorname{supp}(v)\})$

Lemma 2

a) Für $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ gelten:

$$u * v \in C^j(\mathbb{R}^n) \text{ und } \partial^\alpha(u*v) = (\partial^\alpha u) * v, \quad |\alpha| \le j.$$

b) Für $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$ hat man:

$$u * v \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n) \text{ und } \partial^{\alpha+\beta}(u*v) = (\partial^\alpha u) * (\partial^\beta v), \quad |\alpha| \le j, \ |\beta| \le k.$$

2.7 Weitere Eigenschaften von $\mathcal{D}(\Omega)$

Satz 6: Es sei $u \in C_0^0(\Omega)$. Es gelten:

1) $\rho_\varepsilon * u \in C_0^\infty(\Omega)$ für $\varepsilon > 0$ genügend klein

2) $\rho_\varepsilon * u \to u$ $(\varepsilon \to 0)$ gleichmäßig auf Ω

Satz 7: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und K eine kompakte Teilmenge von Ω, so existiert eine Funktion $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $0 \le \phi \le 1$ und $\phi = 1$ in einer Umgebung von K.

Beginn einer Literaturliste

[1] Fischer/Kaul — Mathematik für Physiker, 2 — Teubner Studienbücher

[2] Alt — Lineare Funktionalanalysis — Springer Lehrbuch

[3] Königsberger — Analysis 2 — Springer