2.8 Zerlegung der Eins

Satz 8 Es seien Ω_j $(j=1,\dots,k)$ offene Mengen des $\mathbb{R}^n$ und $\phi \in C_0^\infty(\bigcup_{j=1}^k \Omega_j)$.
Dann gibt es Funktionen $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j=1,\dots,k)$

mit $\phi = \sum_{j=1}^k \phi_j$. Im Fall $\phi \geq 0$ kann $\phi_j \geq 0$ $(j=1,\dots,k)$ erfüllt werden.

Satz 9 Es sei M eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^n$ und $\{\Omega_1,\dots,\Omega_k\}$ eine offene Überdeckung von M.
Dann gibt es Funktionen $\phi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ $(j=1,2,\dots,k)$, die die folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\phi_j \geq 0 \quad , \quad \sum_{j=1}^k \phi_j \leq 1 \quad , \quad \sum_{j=1}^k \phi_j = 1 \text{ in einer}$$

Umgebung von M.

(Die Funktionen $\phi_1,\dots,\phi_k$ heißen <u>Zerlegung der Eins</u> auf M zur Überdeckung $\{\Omega_1,\dots,\Omega_k\}$ (von M))

2.9 Konvergenz in $\mathcal{D}(\Omega)$

Die Folge $(\phi_k)_k \subset \mathcal{D}(\Omega)$ <u>konvergiert in $\mathcal{D}(\Omega)$</u> für $k\to\infty$ gegen $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$

(geschrieben: $\phi_k \to \phi$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ für $k\to\infty$

oder auch: $\mathcal{D}-\lim_{k\to\infty} \phi_k = \phi$)

Def
$\Longleftrightarrow$ 1) Es gibt eine kompakte Menge $M \subset \Omega$, die $\operatorname{supp}(\phi_k) \subset M \quad \forall k$ erfüllt.

2) Für jeden Multiindex α gilt: $\partial^\alpha \phi_k \to \partial^\alpha \phi$ $(k\to\infty)$ gleichmäßig auf Ω.

3.1 Definition, grundlegendes

Definition: Eine Distribution in Ω ist eine lineare Abbildung $T: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{C}$, die die folgende Bedingung erfüllt:
Zu jeder kompakten Menge $K \subset \Omega$ gibt es eine Konstante $C > 0$ und eine Zahl $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_x |\partial^\alpha \varphi(x)| \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(K).$$

1. $\mathcal{D}'(\Omega)$ bezeichnet die Menge der Distributionen in Ω.
2. Mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $S, T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt $aS + bT \in \mathcal{D}'(\Omega)$.
3. Mit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ wird durch $I_f(\varphi) := \int_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, die Distribution I_f definiert.
   I_f heißt die von f erzeugte Distribution.
   Die Distributionen, die durch lokal integrable Funktionen erzeugt werden, sind die regulären Distributionen: $\mathcal{D}'_{reg}(\Omega)$.
   Also: $T \in \mathcal{D}'_{reg}(\Omega) \overset{Def}{\Longleftrightarrow} T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und es gibt ein $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ mit $T = I_f$.
4. Die Zuordnung $j: L^1_{loc}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{reg}(\Omega)$,
   $$j(f) := I_f$$
   ist eine lineare bijektive Abbildung. Mittels j werden f und I_f miteinander identifiziert: Man spricht etwa von der „Distribution sin oder log".
5. Es gibt nicht-reguläre = singuläre Distributionen:
   $x \in \mathbb{R}^n \to \delta_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$: $\delta_x(\varphi) := \varphi(x)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, ist eine singuläre Distribution.