6. Ist $T \in \mathcal{D}'_{reg}(\Omega)$, so gilt $T = I_f$ mit

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} T(\tau_x \rho_\varepsilon) \quad \text{für alle } x \in \Omega, \text{ falls } f \in C(\Omega)$$
(fast überall auf Ω, falls $f \in L^1_{loc}(\Omega)$)

7. Mit $\psi \in C^\infty(\Omega)$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ wird die Distribution $\psi T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ durch

$$(\psi T)(\varphi) := T(\psi \varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

definiert.

Beispiel: $(\psi \delta)(\varphi) = \psi(0)\varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

$x\delta = 0$ (die Nulldistribution)

3.2 Distributionen endlicher Ordnung

1. Es sei $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Kann in der definierenden Ungleichung für T (Anfang 3.1) m von K unabhängig gewählt werden, so heißt T von endlicher Ordnung. Das kleinste derartige m ist die Ordnung von T.
$\mathcal{D}'^m(\Omega)$ bezeichnet den Vektorraum der Distributionen der Ordnung $\leq m$.
δ und I_f ($f \in L^1_{loc}(\Omega)$) sind Distributionen der Ordnung Null.
Satz 1 Es sei $T \in \mathcal{D}'^m(\Omega)$. Dann kann T eindeutig zu einem linearen Funktional auf $C_0^m(\Omega)$ fortgesetzt werden. Die K zugeordnete Ungleichung

$$|T(\varphi)| \leq C \sum_{|\alpha| \leq m} \sup |\partial^\alpha \varphi|, \quad \varphi \in \mathcal{D}(K),$$ bleibt

für alle $\varphi \in C_0^m(K)$ bestehen (wobei links die Fortsetzung von T steht).

$T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ heißt <u>positiv</u>, falls $T(\varphi) \geq 0$ gilt
für alle $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ mit $\varphi \geq 0$.

<u>Satz 2</u> Eine positive Distribution hat die Ordnung Null.

<u>3.3</u> <u>Folgenstetigkeit</u>

<u>Satz 3</u> Es sei T ein lineares Funktional auf $\mathcal{D}(\Omega)$.
Es gilt:
$T \in \mathcal{D}'(\Omega) \longleftrightarrow$ für jede Folge $(\varphi_j)_j \subset \mathcal{D}(\Omega)$, die in $\mathcal{D}(\Omega)$ gegen Null konvergiert, gilt
$T(\varphi_j) \to 0 \quad (j \to \infty)$.

<u>3.4</u> <u>Konvergenz in $\mathcal{D}'(\Omega)$</u>

<u>Def</u>: Sind T und $T_1, T_2, \ldots$ aus $\mathcal{D}'(\Omega)$, so bedeutet: $\underline{T_k \to T \quad (k \to \infty)}$, dass
$$T_k(\varphi) \to T(\varphi) \quad (k \to \infty) \quad \text{für jedes } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$
gilt.

<u>Satz 4</u> (Walter S. 39f, Hörmander S. 38/39 Theorem 2.1.8)
(Schw. Vollständigkeit von $\mathcal{D}'(\Omega)$)
Es sei $(T_k)_k$ eine Folge von Distributionen aus $\mathcal{D}'(\Omega)$.
Existiert $\lim\limits_{k \to \infty} T_k(\varphi) =: T(\varphi)$ für jedes $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

so gelten $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $T_k \to T \quad (k \to \infty)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$

---

weiter mit der <u>Literatur</u>

[4] Gelfand, Shilow Verallgemeinerte Funktionen (VEB 196. Bände 1
[5] Wladimirow Gleichungen der mathematischen Phy (VEB 197.