Beispiele: 1) $\underline{L^1(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)}$ ($L^1(\Omega)$ ist stetig eingebettet in $\mathcal{D}'(\Omega)$)

d.h.: gemäß Abschnitt 3.1, 4 gilt wegen $L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ für jedes $f \in L^1(\Omega)$: $j(f) \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Die Aussage bedeutet, dass j im folgenden Sinn stetig ist: Aus $(f_k)_k, f \subset L^1(\Omega)$ und $f_k \to f$ $(k \to \infty)$ in $L^1(\Omega)$ folgt: $j(f_k) \to j(f)$ $(k \to \infty)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

2)
$$f_k(x) := \begin{cases} k, & 0 < x \le \frac{1}{k} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gelten: $f_k(x) \to 0$ $(k \to \infty)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$

$f_k \to \delta$ $(k \to \infty)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.h.: $j(f_k) \to \delta$ $(k \to \infty)$.

3)
$$f_k(x) := \begin{cases} k^2, & 0 < x \le \frac{1}{k} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt wieder $f_k(x) \to 0$ $(k \to \infty)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Aber: $(j(f_k))_k$ konvergiert in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ nicht.

4) Satz 5 Es sei $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$. Für $\varepsilon > 0$ bilde $f_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Dann gilt: $f_\varepsilon \to \delta$ $(\varepsilon \to 0+)$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (d.h. $j(f_\varepsilon) \to \delta$).

Weiter mit Literatur

[6] Blanchard, Brüning   Mathematical Methods in Physics   (Birkhäuser 2003)

[7] Al-Gwaiz   Theory of Distributions   (New York, M. Dekker 1992)

3.5 Rechnen mit Distributionen

1. Für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ und $x \in \mathbb{R}^n$ wird definiert $\tau_x f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ durch $(\tau_x f)(y) := f(y-x)$.

   Def: Für $x \in \mathbb{R}^n$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ wird die Distribution $\tau_x T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ durch $\underline{(\tau_x T)(\varphi) := T(\tau_{-x}\varphi)}$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ definiert.

   Beispiel: $\tau_{x_0}\delta = \delta_{x_0}$

2. Mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ wird für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ $\vartheta_\lambda f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ durch $(\vartheta_\lambda f)(x) := f(\lambda x)$ definiert.

   Def: Es sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ und $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Durch
   $$\underline{(\vartheta_\lambda T)(\varphi) := \frac{1}{|\lambda|^n} T(\vartheta_{\frac{1}{\lambda}}\varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$
   wird die Distribution $\vartheta_\lambda T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.

   Für $\vartheta_{-1} T$ wird $\check{T}$ geschrieben. Also
   $$\underline{\check{T}(\varphi) = T(\check{\varphi}), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$

3. Ist A eine reguläre (n,n)-Matrix, so bedeutet für $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$: $(\vartheta_A f)(x) := f(Ax)$, $x \in \mathbb{R}^n$.

   Def: Es ist durch
   $$\underline{(\vartheta_A T)(\varphi) := T\left(\frac{1}{|\det(A)|}\vartheta_{A^{-1}}\varphi\right), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)}$$
   die Distribution $\vartheta_A T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ definiert.

3.6 Differentiation von Distributionen

1. Satz 6 (Satz und Def der Ableitung von $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$)

Es sind $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ und $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gegeben.

Dann wird durch

$$S(\varphi) := (-1)^{|\alpha|} T(\partial^\alpha \varphi), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

eine Distribution S auf Ω definiert.

S heißt die Ableitung der Ordnung α von T und wird durch $D^\alpha T$ $(= D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \dots D_n^{\alpha_n} T)$ bezeichnet.

2. Diese Definition ist konsistent mit der Einbettung von Funktionen in die Menge der Distributionen (3.1, 4.) wie folgt: Wird T durch die $C^{|\alpha|}$-Funktion f erzeugt, so wird $D^\alpha T$ durch die Funktion $\partial^\alpha f$ erzeugt:

$$D^\alpha I_f = I_{\partial^\alpha f}.$$

3. Für $n = 1$, I offen $\subset \mathbb{R}$ und $T \in \mathcal{D}'(I)$ schreiben wir für die Ableitung DT. Also:

$$(DT)(\varphi) = -T(\varphi'), \quad \varphi \in \mathcal{D}(I).$$

4. Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gilt mit $h \in \mathbb{R}$ und $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$:

$$D_1 T = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(\tau_{-he_1} T - T).$$

5. Beispiele

$n = 1$: $\quad DH = \delta$

$T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}),\ a \in \mathbb{R}$: $\quad D(\tau_a T) = \tau_a DT$

$$D(\tau_a H) = \tau_a \delta = \delta_a$$