6. Satz 7 (Leibniz Regel)

$\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$, $\varphi \in C^\infty(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Es gilt

$$D^\alpha(\varphi T) = \sum_{\substack{\beta,\gamma \\ \beta+\gamma=\alpha}} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} (\partial^\beta \varphi)(D^\gamma T)$$

Beispiel: Für x_+ mit $x_+(x) = xH(x)$ gilt

$$D x_+ = H, \quad D^2 x_+ = \delta$$

7. Satz 8

Eine Distribution besitzt partielle Ableitungen beliebig hoher Ordnung. Die Ableitungen sind unabhängig von der Reihenfolge der Differentiationen:

$$D^\alpha(D^\beta T) = D^\beta(D^\alpha T), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n, \ T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

8. Aus $(T_j)_j \subset \mathcal{D}'(\Omega)$, $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ und $T_j \to T$ $(j \to \infty)$ folgt $D^\alpha T_j \to D^\alpha T$ $(j \to \infty)$.

($D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ ist folgenstetig.)

Folgerung: Aus $S = \sum_{k=0}^\infty T_k$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ folgt $D^\alpha S = \sum_{k=0}^\infty D^\alpha T_k$

für jeden Multiindex α.

Beispiel (f_k): $f_k(x) = \frac{1}{k} \sin kx$, $x \in \mathbb{R}$. Es gilt

$f_k \to 0$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$ für $k \to \infty$. Die Folge $(f_k')_k = (\cos kx)_k$ konvergiert nicht mal punktweise.

Aber $I_{f_k} \to 0$ $(k \to \infty)$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ und $I_{f_k'} \to 0$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Bemerkung: Es gilt der folgende Satz:
Konvergiert die Folge $(f_j)_j \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ auf jedem Kompaktum gleichmäßig gegen f, so gilt $I_{f_j} \to I_f$ $(j \to \infty)$ (in $\mathcal{D}'$).

(mit obiger Folgerung gilt dann: $D^\alpha I_{f_j} \to D^\alpha I_f$ $(j \to \infty)$.)

3.7 Der Hauptwert von $\frac{1}{x}$

1. $n = 1$. Für $\varepsilon > 0$ betrachte $f_\varepsilon(x) := \frac{1}{x} H(|x| - \varepsilon)$.

$\lim_{\varepsilon \to 0+} I_{f_\varepsilon}$ existiert (in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$). Es

gilt $\lim_{\varepsilon \to 0+} I_{f_\varepsilon}(\varphi) = -\int_{\mathbb{R}} (\ln|x|)\varphi'(x)\,dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Die Distribution $\lim_{\varepsilon \to 0+} I_{f_\varepsilon}$ heißt der Hauptwert von $\frac{1}{x}$.

(1) $$pV\left(\tfrac{1}{x}\right) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}) : pV\left(\tfrac{1}{x}\right)(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

(2) Es gelten: $$D(\ln|x|) = pV\left(\tfrac{1}{x}\right)$$

(3) $$pV\left(\tfrac{1}{x}\right)(\varphi) = \int_{|x| \leq 1} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x}\,dx + \int_{|x| > 1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$$

(4) $$pV\left(\tfrac{1}{x}\right)(\varphi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(x) - \varphi(-x)}{x}\,dx, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Beispiel: $x\, pV\left(\tfrac{1}{x}\right) = 1$

3.8 Regularisierung eines divergenten Integrals

Es sei $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Es gelte mit einer positiven Konstanten c und mit $m \in \mathbb{N}$ für $|x| \leq 1$: $|f(x)| \leq \frac{c}{|x|^m}$.
Dann gibt es eine Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit

$$T(\varphi) = I_f(\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Es ist $T(\varphi) := \int\limits_{|x|>1} f(x)\varphi(x)dx + \int\limits_{|x|\leq 1} f(x)\left(\varphi(x) - \sum\limits_{k=0}^{m-1} \frac{x^k}{k!}\varphi^{(k)}(0)\right)dx$,

$\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. T heißt <u>Regularisierung des divergenten Integrals</u> $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)\,dx$.

3.9 Differentiation unstetiger Funktionen

Es sei $f \in C^1(x \leq x_0) \cap C^1(x \geq x_0)$. Setze $s := f(x_0+0) - f(x_0-0)$.
Es gilt

$$D I_f = I_{f'} + s\,\delta_{x_0}$$

<u>d.h. auch:</u> $D I_f(\varphi) = -\int\limits_{\mathbb{R}} f\varphi'\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f'\varphi\,dx + s\varphi(x_0)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

<u>Literatur</u>

[8] R. S. Strichartz — A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms (World Scientific Publishing 2003)

[9] Richards, Youn — Theory of Distributions (Cambridge Uni Press 1995)

[10] Friedlander, Joshi — Introduction to the Theory of Distributions (Cambridge Uni Press 2nd edition 1998)