gehört zu Abschnitt 3.7 / S.19 unten:

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{x \pm i\varepsilon}$ existiert in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, d.h. für $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

existiert $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x \pm i\varepsilon} dx$ und $= pV(\frac{1}{x})(\varphi) \mp i\pi\varphi(0)$ $\boxed{*}$

Die Distributionen, die durch diesen Limes definiert werden werden durch $\frac{1}{x \pm i0}$ bezeichnet. $\boxed{*}$ besagt dann:

$$\frac{1}{x \pm i0} = pV(\frac{1}{x}) \mp i\pi\delta$$ Formeln von Sokhotski - Plemelji

---

3.10 (siehe auch 3.4/A1) Zu GDGln

1. $\mathcal{D}_0(\mathbb{R}) := \{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) / \psi = \varphi' \text{ für ein } \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})\}$

Es gilt:

$\psi \in \mathcal{D}_0(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ und $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi(x)dx = 0$.

2. Es sei $\alpha \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ mit $\int\limits_{\mathbb{R}} \alpha(x)dx = 1$ für das Folgende fest gewählt.

Durch $P(\varphi) := \varphi - \alpha \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ wird eine Abbildung $P: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}_0(\mathbb{R})$ gegeben. Es gelten:

2.1 P ist linear und stetig

2.2 $P^2 = P$

2.3 $P(\varphi') = \varphi'$

3. Definiere $J: \mathcal{D}(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ durch

$J(\varphi)(x) := \int\limits_{-\infty}^{x} \varphi(t)dt$. Es gelten

3.1 $J(P\varphi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

3.2 $\varphi \to J(P\varphi)$ ist linear und stetig $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \to \mathcal{D}(\mathbb{R})$

4. Satz 9 Zu jeder Distribution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ gibt es ein unbestimmtes Integral S: das ist eine Distribution $S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ mit $DS = T$.

Mit 1., 2., 3. kann man S direkt angeben:
$$S(\varphi) := -T(J(R\varphi)), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

5. Lemma: Aus $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $DT = 0$ folgt $T = C$, d.h. T ist aus $\mathcal{D}'_{reg}(\mathbb{R})$ und wird von der konstanten Funktion c erzeugt: $T(\varphi) = c \int_{\mathbb{R}} \varphi\, dx$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Folgerung Aus $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ und $D^n T = 0$ ($n \in \mathbb{N}$) folgt, $T = I_{P_{n-1}}$, wobei P_{n-1} ein Polynom vom Grade $\leq n-1$ ist.

6. Satz 10
Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ offen, und es seien $a \in C^\infty(\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ gegeben. Für $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ gelte in $\mathcal{D}'(\Omega)$ $DT + aT = f$. Dann ist $T \in C^1(\Omega)$, und es gilt im klassischen Sinn
$$T' + aT = f \text{ auf } \Omega.$$
(d.h.: T wird von einer C^1-Fkt t erzeugt, für die $t'(x) + a(x)t(x) = f(x)$, $x \in \Omega$, gilt.)

Literatur [11] Zemanian Distribution Theory and Transform Analysis (McGraw Hill 1965)

[12] Trèves Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels (Acad Press 1967)

[13] Triebel Höhere Analysis (VEB 1972)

3.11 Zu Partiellen Dorln

$E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ heißt Fundamentallösung des Differential-operators $P = \sum_\alpha a_\alpha \partial^\alpha$ (a_α konst), falls
$$PE = \delta \quad (\text{in } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)) \text{ gilt, falls also}$$
$$\sum_\alpha a_\alpha D^\alpha E = \delta \text{ gilt.}$$

Beispiele 1) siehe 8. Übungsblatt A3, A4
2) siehe etwa [5]
3) $P = \Delta_2 = D_1^2 + D_2^2$
Es ist für $x \in \mathbb{R}^2$: f mit $f(x) = \ln\|x\|$ aus $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$. Für $E = I_f$ gilt $\Delta_2 E = \delta$.

4) Es sei $P = \frac{1}{2} D_1 + \frac{1}{2} i D_2$ der Cauchy-Riemann Differentialoperator. Eine Fundamentallösung ist die durch die lokal integrierbare Funktion $\left(\frac{1}{\pi}\frac{1}{z} = \right) \frac{1}{\pi(x+iy)}$ $(\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2))$

erzeugte reguläre Distribution.

---

bei 3.11 wird verwendet: $G \subseteq \mathbb{R}^2$ sei Gebiet, $\partial G = S$ sei stückweise glatt. $\delta_S \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ sei die durch
$$\delta_S(\varphi) := \int_S \varphi(x)\, ds, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \text{ definierte Distribution.}$$
Es sei $f \in C^1(\overline{G}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus G)$.
Mit
$$[f]_S(x) = \lim_{x' \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G} \to x} f(x') - \lim_{x'' \in G \to x} f(x''), \quad x \in S,$$
gilt: $D_j f = I_{\partial_j f} + [f]_S\, n_j \delta_S$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, wobei $n = \binom{n_1}{n_2}$ auf S die bzgl. G äußere Einheitsnormale ist.
