Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
15.04.2015

Evolutionsgleichungen

01. Übungsblatt

Aufgabe 1:
Sei $X := \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K}) : \|f\|_X := \sup_{n \geq 0} \left\| f^{(n)} \right\|_\infty < \infty \right\}$.

(a) Zeigen Sie:

(i) $(X, \|\cdot\|_X)$ ist ein Banachraum,

(ii) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \in \mathcal{L}(X)$ und

(iii) jede Funktion $f \in X$ wird für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ durch ihre Potenzreihe um x_0 dargestellt.

(b) Finden Sie für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine einfache Darstellung des Operators $e^{t \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}$.

Aufgabe 2:
Sei $1 \leq p < \infty$. Für $f \in L^p(1, \infty)$ und $x \in (1, \infty)$, definiere $(T(t)f)(x) = f(e^t x)$.

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t \geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf $L^p(1, \infty)$ ist.

(b) Berechnen Sie die Wachstumsschranke $\omega_0(T)$.

Aufgabe 3:
Sei $X := l^2(\mathbb{C}^2) = \left\{ (x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{C}^2)^\mathbb{N} : \sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 + |y_n|^2 < \infty \right\}$ ausgestattet mit der Norm $\|(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty |x_n|^2 + |y_n|^2}$ und sei $\beta \geq 0$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $t \geq 0$ sei

$$A_n(t) = \begin{pmatrix} e^{-nt} & tn^\beta e^{-nt} \\ 0 & e^{-nt} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T(t)(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(A_n(t) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

(a) Zeigen Sie, dass $(T(t))_{t \geq 0}$ eine Operatorfamilie auf X ist, welche die Halbgruppeneigenschaft erfüllt.

(b) Bestimmen Sie alle β für die $(T(t))_{t \geq 0}$ stark stetig ist.

(c) Bestimmen Sie für diese β den Erzeuger A von $(T(t))_{t \geq 0}$ und seinen Definitionsbereich $D(A)$.

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 4:
Seien X, Y Banachräume.

(a) Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(X,Y)$, die stark gegen ein $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ konvergiert. D.h. es gilt $T_n x \to Tx$ für jedes $x \in X$.

Zeigen Sie: Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x \in X$, so gilt auch $T_n x_n \to Tx$.

(b) Sie $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $S : I \to \mathcal{L}(X,Y)$ stark stetig. D.h. für jedes $x \in X$ ist $I \to Y$, $t \mapsto S(t)x$ stetig.

Zeigen Sie: Dann ist auch $I \times X \to Y$, $(t,x) \mapsto S(t)x$ stetig.

Quelle: http://www.xkcd.com/1075/ **Urheber:** Randall Munroe