Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
22.04.2015

Evolutionsgleichungen

02. Übungsblatt

Aufgabe 5:

(a) Die Abbildung $\omega : (0,\infty) \to [0,\infty)$ sei auf dem Intervall $(0,1]$ nach oben beschränkt und erfülle $\omega(t+s) \leq \omega(t)\omega(s)$ für alle $t, s \in (0,\infty)$. Zeigen Sie

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t} = \inf_{t>0} \frac{\log(\omega(t))}{t}.$$

Folgern Sie, dass die Wachstumsschranke $\omega_0(T)$ einer C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ durch

$$\omega_0(T) = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(\|T(t)\|)}{t}$$

gegeben ist.

(b) Die reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfülle $0 \leq a_{n+m} \leq a_n a_m$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}.$$

Folgern Sie, dass für den *Spektralradius* $r(T)$ eines Operators $T \in \mathcal{L}(X)$ auf dem Banachraum X

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} < \infty$$

gilt.

Aufgabe 6:

Sei X ein Banachraum und A, B seien abgeschlossene lineare Operatoren in X mit Definitionsbereichen $D(A) = D(B) \subseteq X$. Zeigen Sie:

(a) Die Graphennormen von A und B sind äquivalent.

(b) Ist A injektiv, so ist A^{-1} abgeschlossen.

(c) Ist B bijektiv, so ist $AB^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

(d) Ist A bijektiv und B injektiv, so ist AB^{-1} abgeschlossen.