Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
29.04.2015

Evolutionsgleichungen

03. Übungsblatt

Aufgabe 7:

(a) Betrachten Sie den Banachraum $X = C([0,1])$ ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. In diesem sei der lineare Operator $A := -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ mit $D(A) = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,|\, f(0) = 0 \right\}$ definiert.

(i) Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.

(ii) Berechnen Sie die Resolventenmenge $\rho(A)$ und die Resolvente $R(\cdot, A) : \rho(A) \to \mathcal{L}(X)$. Zeigen Sie dabei insbesondere $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$.

(iii) Zeigen Sie die Abschätzung $\|R(\lambda, A)^n\| \leq \frac{1}{\lambda^n}$ für alle $\lambda > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Zeigen Sie, dass A keine C_0-Halbgruppe erzeugt.

(b) Sei nun $X_0 = \{f \in C([0,1]) \,|\, f(0) = 0\}$, $D(A_0) = \left\{ f \in C^1([0,1]) \,|\, f(0) = 0 \wedge f'(0) = 0 \right\}$ und $A_0 = A|_{D(A_0)}$.

(i) Zeigen Sie, dass A_0 eine C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf $(X_0, \|\cdot\|_\infty)$ erzeugt.

(ii) Berechnen Sie $T(t)$ für $t \geq 0$.

Hinweis: Welches Cauchy-Problem löst $t \mapsto T(t)x$ für $x \in D(A_0)$?

(iii) Interpretieren Sie (aiv) im Hinblick auf (bii).

Aufgabe 8:

(a) Sei X ein Banachraum, $Y \subseteq X$ ein abgeschlossener linearer Unterraum von X. Ferner sei $A : X \supseteq D(A) \to X$ ein linearer Operator auf X. Die Einschränkung $A_Y := A|_{D(A_Y)}$ von A auf die Menge $D(A_Y) := \{x \in D(A) \cap Y \,|\, Ax \in Y\}$ heißt der *Teil von A in Y*.

(i) Zeigen Sie: Ist A abgeschlossen in X, so ist auch A_Y abgeschlossen in Y.

(ii) Zeigen Sie: Ist A bijektiv, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und $A^{-1}Y \subseteq Y$, so ist $A_Y : D(A_Y) \to Y$ bijektiv und $(A_Y)^{-1} = (A^{-1})_Y \in \mathcal{L}(Y)$.

(b) Sei ferner $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf X mit Erzeuger A und $T(t)Y \subseteq Y$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $(S(t))_{t\geq 0} := (T(t)|_Y)_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe auf Y. Bestimmen Sie ihren Erzeuger B.