

Evolutionsgleichungen

04. Übungsblatt

Aufgabe 9:

Sei $a \in C([0, 1])$ mit $a(x) > 0$ für alle $x \in [0, 1]$. Definiere A_0 in $C([0, 1])$ durch $D(A_0) = C^\infty([0, 1])$ und $(A_0 f)(x) = a(x)f'(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ und alle $f \in C^\infty([0, 1])$.

- (a) Zeigen Sie, dass A_0 ein abschließbarer linearer Operator ist und berechnen Sie den Abschluss A von A_0 .
- (b) Sei $b \in C([0, 1])$ und $Bf := bf$ für $f \in C([0, 1])$. Zeigen Sie, dass durch $(A+B)f := Af + Bf$ für $f \in D(A+B) := D(A)$ ein abgeschlossener Operator $A+B$ in $C([0, 1])$ definiert wird.

Aufgabe 10:

Zeigen Sie die Dissipativität der folgenden Operatoren auf den jeweiligen Banachräumen. Welche Operatoren sind abgeschlossen? Welche erzeugen eine Kontraktionshalbgruppe?

- (a) Seien $m \in C(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{Re} m \leq 0$, $X_1 := C_0(\mathbb{R}^d)$, $D(A_1) = \{f \in X_1 \mid mf \in X_1\}$ und

$$A_1 f = mf \quad \forall f \in D(A_1).$$

- (b) Seien $b, c \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $X_2 = C_0(\mathbb{R})$, und $D(A_2) = \{f \in C^1(\mathbb{R}) \mid f, f' \in X_2\}$ und

$$A_2 f = bf' + (c - \|c\|_\infty)f \quad \forall f \in D(A_2).$$

- (c) Sei $X_3 = L^2([0, 1])$, $D(A_3) = \{f \in C^1([0, 1]) \mid f(1) = 0\}$ und

$$A_3 f = f' \quad \forall f \in D(A_3).$$

- (d) Sei $X_4 = C_0(\mathbb{R}^d)$, $D(A_4) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^d) \mid f \in C_0(\mathbb{R}^d) \wedge \Delta f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}$ und

$$A_4 f = \Delta f \quad \forall f \in D(A_4).$$

Aufgabe 11:

Sei $X = C([0, 1])$, $D(A) = \{f \in C^2([0, 1]) \mid f'(0) = f'(1) = 0\}$ und $Af = f''$ für alle $f \in D(A)$. Zeigen Sie, dass A eine Kontraktionshalbgruppe auf X erzeugt.