Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
20.05.2015

Evolutionsgleichungen

06. Übungsblatt

Aufgabe 14:

Sei $d \in \mathbb{N}$ und $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\rho(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{\|x\|_2^2 - 1}\right) & \text{für } \|x\|_2 < 1, \\ 0 & \text{für } \|x\|_2 \geq 1 \end{cases}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(a) Zeigen Sie $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(b) Sei $C := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)\mathrm{d}x}$ und $\varepsilon > 0$. Definiere $\rho_\varepsilon : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ durch $\rho_\varepsilon(x) = \frac{C}{\varepsilon^d}\rho\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$. Zeigen Sie $\rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\operatorname{supp}(\rho_\varepsilon) = \overline{B(0,\varepsilon)}$, $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon = 1$.

(c) Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{C})$. Für jedes $\varepsilon > 0$ definiere $\Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega |\, d(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ und $f_\varepsilon : \Omega_\varepsilon \to \mathbb{C}$ durch

$$f_\varepsilon(x) = (\rho_\varepsilon * f)(x) := \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)f(y)\mathrm{d}y = \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)f(x-y)\mathrm{d}y$$

für alle $x \in \Omega_\varepsilon$. Zeigen Sie:

(i) $f_\varepsilon \in C^\infty(\Omega_\varepsilon)$,

(ii) $f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} f(x)$ für fast alle $x \in \Omega$,

(iii) für $f \in C(\Omega)$ gilt $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} f$ kompakt in Ω (d.h. gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge $M \subseteq \Omega$),

(iv) für $1 \leq p < \infty$ und $f \in L^p_{\text{loc}}(\Omega)$ gilt $f_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0+} f$ in $L^p_{\text{loc}}(\Omega)$.

Hinweis: Sie können ohne Beweis den folgenden Satz verwenden:

Satz. *Sei $d \in \mathbb{N}$ und $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt*

$$\lim_{r \to 0+} \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0,r)} |f(x) - f(x_0)|\,\mathrm{d}x = 0$$

für fast alle $x_0 \in \mathbb{R}^d$.

Aufgabe 15:

(a) Sei $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Zeigen Sie das Lemma von du Bois-Reymond:

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad f(x) = 0 \text{ für fast alle } x \in \Omega$$

— Bitte wenden! —

(b) Vervollständigen Sie den Beweis des folgenden Lemmas aus der Vorlesung:
Lemma. *Sei* $k \in L^1_{loc}(0,1)$. *Es gilt*

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(0,1): \int_0^1 k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad k(x) = 0 \textit{ für fast alle } x \in (0,1),$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(0,1): \int_0^1 k(x)\varphi'(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists c \in \mathbb{C}: k(x) = c \textit{ für fast alle } x \in (0,1),$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(0,1): \int_0^1 k(x)\varphi''(x)\mathrm{d}x = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists a,b \in \mathbb{C}: k(x) = ax+b \textit{ für fast alle } x \in (0,1).$$

Aufgabe 16:

Sei $\Omega = (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ und $1 < p' < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Zeigen Sie

(a) $C^\infty(\Omega) \cap W_p^k(\Omega)$ ist dicht in $W_p^k(\Omega)$,

(b) zu jedem $f \in W_p^k(\Omega)$ existiert ein

$$g \in C^{k-1,\frac{1}{p'}}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C^{k-1}(\overline{\Omega}) \,|\, \exists C > 0 : \forall x,y \in \overline{\Omega} : \left| u^{(k-1)}(x) - u^{(k-1)}(y) \right| \leq C\,|x-y|^{\frac{1}{p'}} \right\}$$

mit $\|f-g\|_{W_p^k(\Omega)} = 0$.

Aufgabe 17:

(a) Beweisen Sie die folgende Formel für $f,g \in W_2^2((0,1))$

$$\int_0^1 f''(x)g(x)\mathrm{d}x = \left[f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\right]_{x=0}^1 + \int_0^1 f(x)g''(x)\mathrm{d}x.$$

(b) Für welche Wahl von $D(A) \subseteq L^2((0,1))$ ist der Operator $A : D(A) \to L^2((0,1))$ mit $Af = f''$ für alle $f \in D(A)$ selbstadjungiert?

(i) $D(A) = \left\{ f \in W_2^2((0,1)) \,|\, f(0) = f(1) = 0 \right\}$

(ii) $D(A) = \left\{ f \in W_2^2((0,1)) \,|\, f'(0) = f'(1) = 0 \right\}$

(iii) $D(A) = \left\{ f \in W_2^2((0,1)) \,|\, f(0) = f(1), f'(0) = f'(1) \right\}$

(iv) $D(A) = \left\{ f \in W_2^2((0,1)) \,|\, f(0) = f(1), f'(0) = -f'(1) \right\}$

(v) $D(A) = \left\{ f \in W_2^2((0,1)) \,|\, f(0) = -f'(1), f'(0) = f(1) \right\}$

(vi) $D(A) = \left\{ f \in W_2^2((0,1)) \,|\, f(0) = f'(0), f(1) = f'(1) \right\}$