Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
27.05.2015

Evolutionsgleichungen

07. Übungsblatt

Aufgabe 18:
Sei $d \in \mathbb{N}$, $\emptyset \neq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit $\partial\Omega \in C^2$. Betrachten Sie das folgende Cauchy-Problem zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} u''(t) &= \Delta_{\mathrm{D}} u(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \\ u(0) &= u_0, \\ u'(0) &= u_1 \end{aligned}$$

in $X = L^2(\Omega)$, wobei für die Anfangsdaten $u_0 \in D(\Delta_{\mathrm{D}}) = W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$ gilt und die Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}, L^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}, W_{2,0}^1(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}, W_2^2(\Omega))$ gesucht wird.

Sei ferner $E = W_{2,0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $D(A) = D(\Delta_{\mathrm{D}}) \times W_{2,0}^1(\Omega)$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta_{\mathrm{D}} & 0 \end{pmatrix}$. In E wird das folgende Cauchy-Problem erster Ordnung betrachtet

$$\begin{aligned} w''(t) &= Aw(t) \qquad (t \in \mathbb{R}), \\ w(0) &= \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei für die Anfangsdaten wieder $u_0 \in D(\Delta_{\mathrm{D}}) = W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$ gilt und die Lösung $w \in C^1(\mathbb{R}, E) \cap C(\mathbb{R}, [D(A)])$ gesucht wird.

(a) Zeigen Sie, dass die durch

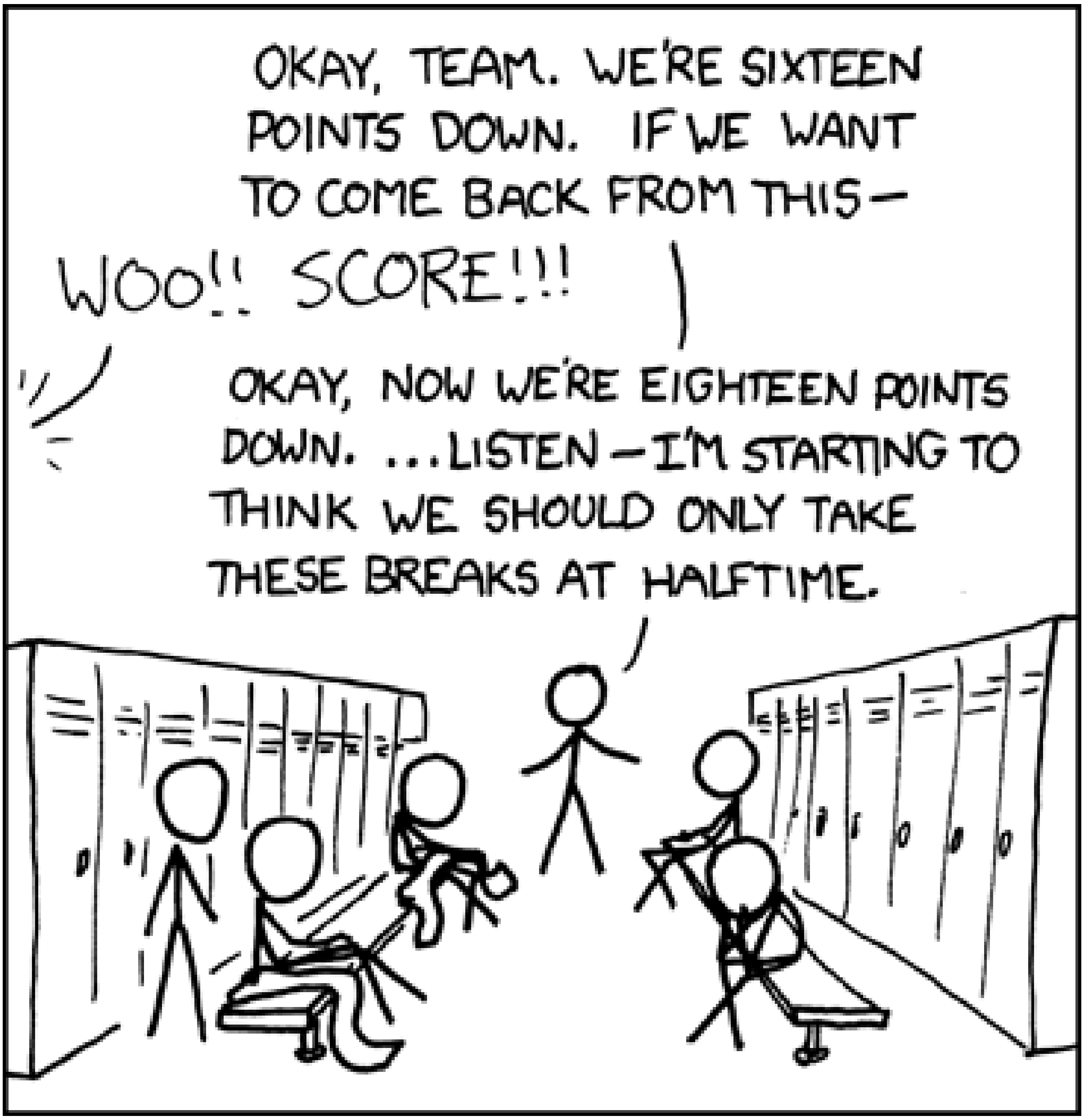
$$\begin{aligned} \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|_E &= \sqrt{\int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 + |u_1(x)|^2 \,\mathrm{d}x}, \\ \left\| \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \right\|_{W_{2,0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega)} &= \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u_0\|_2^2 + \|u_1\|_2^2} \end{aligned}$$

für alle $\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in E$ definierten Normen äquivalent sind.

(b) Zeigen Sie, dass für $u \in W_2^2(\Omega) \cap W_{2,0}^1(\Omega)$ und $i, j \in \{1, \ldots, d\}$ die Abschätzung $\|\partial_i \partial_j u\|_2 \leq \|\Delta u\|_2$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass die obigen Cauchy-Probleme im folgenden Sinne äquivalent sind: Ist u eine Lösung des Problems zweiter Ordnung, so ist $\begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}$ eine Lösung des Problems erster Ordnung. Ist umgekehrt $w = \begin{pmatrix} w_0 \\ w_1 \end{pmatrix}$ eine Lösung des Problems erster Ordnung, so ist w_0 eine Lösung des Problems zweiter Ordnung.

— Bitte wenden! —



Quelle: http://www.xkcd.com/544/ **Urheber:** Randall Munroe