Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
03.06.2015

Evolutionsgleichungen

08. Übungsblatt

Aufgabe 19:
Sei X ein Banachraum, A erzeuge die C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ auf X, es sei $f \in C(\mathbb{R}_0^+, X)$ und $u_0 \in X$. Eine *integrierte Lösung* des Cauchy-Problems

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) + f(t) \qquad (t \geq 0), \\ u(0) &= u_0 \end{aligned}$$

ist eine Funktion $u \in C(\mathbb{R}_0^+, X)$ mit $\int_0^t u(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ und

$$u(t) = A\int_0^t u(s)\mathrm{d}s + u_0 + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

für alle $t \geq 0$. Zeigen Sie, dass die *milde Lösung*

$$v(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s \qquad (t \geq 0)$$

die eindeutige integrierte Lösung des obigen Cauchy-Problems ist.

Aufgabe 20:

(a) In $X = C([0,1])$ sei der Operator A definiert durch

$$Au = u'' \qquad \text{für alle} \qquad u \in D(A) := \left\{ v \in C^2([0,1]) \,|\, v'(0) = v'(1) = 0 \right\}.$$

Zeigen Sie, dass A der Erzeuger einer beschränkten analytischen Halbgruppe in X ist.

(b) In $X = C([0,1])$ sei der Operator A definiert durch

$$Au = -\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \qquad \text{für alle} \qquad u \in D(A) = \left\{ v \in C^1([0,1]) | v'(0) = v(1) \right\}.$$

Finden Sie eine Darstellung der Resolvente von A. Erzeugt A eine beschränkte analytische Halbgruppe in X?

Aufgabe 21:
Sei $d \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $T(t) = e^{tA}$ für alle $t \geq 0$. Für $x = (x_1, ..., x_d)^T \in \mathbb{R}^d$ sei $x \geq 0$ definiert durch $x_j \geq 0$ für alle $j \in \{1, \ldots, d\}$. Charakterisieren Sie die Matrizen A mit $T(t)x \geq 0$ für alle $x \geq 0$ und $t \geq 0$, d.h. also die Erzeuger positiver Halbgruppen.