Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
10.06.2015

Evolutionsgleichungen

09. Übungsblatt

Aufgabe 22:

Sei $X := (\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum, $m : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-messbar und $1 \leq p \leq \infty$. Ferner sei

$$Af := mf \qquad \text{für alle} \qquad f \in D(A) := \{f \in L^p(\Omega) |\, mf \in L^p(\Omega)\}\,.$$

(a) Zeigen Sie $A \in \mathcal{L}(L^p(\Omega)) \Leftrightarrow m \in L^\infty(\Omega)$.

(b) Zeigen Sie $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} |\, \mu(\{\omega \in \Omega |\ |\lambda - m(\omega)| < \varepsilon\}) > 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0\} := m_{\text{ess}}(\Omega)$. Man nennt m_{ess} den *wesentlichen Bildbereich* von m.

(c) Sei nun $p < \infty$ und $\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re} m(\omega) < \infty$. Zeigen Sie, dass A genau dann eine beschränkte analytische Halbgruppe vom Winkel $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ in $L^p(\Omega)$ erzeugt, wenn $\Sigma_{\theta + \frac{\pi}{2}} \subseteq \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}$.

Aufgabe 23:

Sei $\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^3 |\ \|x\|_2 < 1\right\}$. Betrachten Sie $T : W_2^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) \to L^2(\partial\Omega)$ definiert durch

$$Tu = u|_{\partial\Omega} \qquad \forall u \in W_2^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}).$$

(a) Zeigen Sie, dass T in der $W_2^1(\Omega)$-Norm beschränkt ist.

(b) Zeigen Sie, dass für die stetige Fortsetzung $\overline{T} : W_2^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ von T

$$\overline{T}u = u|_{\partial\Omega} \qquad \forall u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

gilt.

(c) Zeigen Sie, dass es keinen stetigen linearen Operator $S : L^2(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ gibt mit

$$Su = u|_{\partial\Omega} \qquad \forall u \in L^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}).$$