Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
17.06.2015

Evolutionsgleichungen

10. Übungsblatt

Aufgabe 24:
Sei $d \in \mathbb{N}$, $1 < p < \infty$ und $m \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. Alle partiellen Ableitungen von m seien polynomiell beschränkt. D.h. für jeden Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ existieren Konstanten $C_\alpha > 0$, $l_\alpha \in \mathbb{N}_0$ derart, dass

$$|D^\alpha m(\xi)| \leq C_\alpha (1 + \|\xi\|_2)^{l_\alpha}$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ ausfällt. Sei $D(T_m) := \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und

$$T_m f = \mathcal{F}^{(-1)}(m\mathcal{F}(f)) \qquad \forall f \in D(T_m).$$

(a) Zeigen Sie, dass T_m in $L^p(\mathbb{R}^d)$ abschließbar ist. Sein Abschluss heiße $\overline{T_m}$.

(b) Sei hier $p = 2$, $s \in \mathbb{N}_0$ und

$$m(\xi) = (1 + \|\xi\|_2^2)^{\frac{s}{2}} \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Zeigen Sie $D(\overline{T_m}) = W_2^s(\mathbb{R}^d)$.

(c) Sei hier $p = 2$. Zeigen Sie $\sigma(\overline{T_m}) = \overline{m(\mathbb{R}^d)}$.

Aufgabe 25:
Seien $X = L^2(\mathbb{R}^d)$, $k, d \in \mathbb{N}$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| = k$ sei $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Ferner seien

$$Af = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha f \quad \forall f \in D(A) = W_2^k(\mathbb{R}^d) \qquad \text{und} \qquad a(\xi) = \sum_{|\alpha|=k} (\mathrm{i})^{|\alpha|} a_\alpha \xi^\alpha \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Es existiere ein $C > 0$ mit $\operatorname{Re} a(\xi) \geq C \|\xi\|_2^k$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$.

(a) Zeigen Sie $A = \overline{T_a}$ in X (siehe Aufgabe 24).

(b) Zeigen Sie, dass A sektoriell ist vom Typ

$$0 \leq \Theta = \arctan\left(\sup_{\|\xi\|_2=1} \left[\frac{|\operatorname{Im} a(\xi)|}{\operatorname{Re} a(\xi)} \right] \right) < \frac{\pi}{2}.$$