Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
24.06.2015

Evolutionsgleichungen

11. Übungsblatt

Aufgabe 26:
Sei X ein Banachraum, $A : D(A) \to X$ ein abgeschlossener linearer Operator auf X und $B : D(A) \subseteq D(B) \to X$ ein linearer A-beschränkter Operator. Ferner sei $D(A+B) = D(A)$.

(a) Sei $\lambda \in \rho(A)$ und $\|BR(\lambda, A)\| < 1$. Zeigen Sie, dass $A+B$ abgeschlossen ist und $\lambda \in \rho(A+B)$.

(b) Nun sei X ein Hilbertraum, A selbstadjungiert und B symmetrisch mit A-Schranke $a < 1$. Zeigen Sie, dass $A+B$ selbstadjungiert ist.

Aufgabe 27:
Sei $X = L^2(\mathbb{R}^3)$, $V_1 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $V_2 \in L^2(\mathbb{R}^3)$ und $V = V_1 + V_2$. Ferner sei $A = \Delta$ mit $D(A) = W_2^2(\mathbb{R}^3)$ und $Bf = Vf$ für alle $f \in D(B) = \left\{g \in L^2(\mathbb{R}^3) \,|\, Vg \in L^2(\mathbb{R}^3)\right\}$.

(a) Sei V reellwertig. Zeigen Sie, dass $A+B$ selbstadjungiert ist.

(b) Zeigen Sie, dass $A+B$ eine analytische Halbgruppe vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ erzeugt.

Hinweise:

- Zeigen Sie zunächst, dass für jedes $a > 0$ ein $b > 0$ existiert so, dass jedes $f \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$ eine wesentlich beschränkte Funktion ist und
$$\|f\|_\infty \le a\,\|\Delta f\|_2 + b\,\|f\|_2\,.$$

- Eine analytische Halbgruppe vom Winkel $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ im Banachraum X ist eine Familie $(T(z))_{z \in \Sigma_\omega \cup \{0\}}$ mit
  (i) $T(0) = I$ und $T(t)T(s) = T(t+s)$ für alle $t, s \in \Sigma_\omega$,
  (ii) $z \mapsto T(z)$ ist holomorph als Abbildung $\Sigma_\omega \to \mathcal{L}(X)$,
  (iii) für alle $\theta \in (0, \omega)$ und alle $x \in X$ gilt $T(z)x \to x$ für $\Sigma_\theta \ni z \to 0$

  (vgl. Definition 2.10 der Vorlesung).