Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
01.07.2015

Evolutionsgleichungen

12. Übungsblatt

Aufgabe 28:

(a) Sei X der Banachraum der komplexen Nullfolgen

$$X := c_0(\mathbb{C}) = \left\{ (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \middle| \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\} \subseteq l^\infty(\mathbb{C})$$

ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Auf diesem sei der Operator A durch

$$A\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) := (\mathrm{i}kx_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A) := \{(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X |\, (\mathrm{i}ky_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X\}$$

und für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei der Operator B_n durch

$$B_n\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) := (\delta_{nk} k x_k)_{k\in\mathbb{N}} \qquad \forall (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$$

erklärt.

(i) Berechnen Sie die von A erzeugte C_0-Halbgruppe $T(\cdot)_{t\geq 0}$.

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Operator $A_n := A + B_n$ die C_0-Halbgruppe $T_n(\cdot)_{t\geq 0}$ erzeugt mit $\|T_n(t)\| = e^{nt}$.

(iii) Folgern Sie, dass es ein $t > 0$ und $x \in X$ so gibt, dass $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.

(iv) Zeigen Sie, dass $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark gegen A auf $D(A)$ konvergiert.

Welche Voraussetzung des Satzes 3.5 (Trotter-Kato I) ist verletzt?

(b) Sei $\{0\} \neq X$ ein Banachraum. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := -nI$ und $T_n(\cdot)$ die von A_n erzeugte C_0-Halbgruppe.

(i) Zeigen Sie, dass $\lambda \in \rho(A_n)$ für für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und jedes $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie, dass $(R(\lambda, A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ stark gegen einen stetigen Operator $A \in \mathcal{L}(X)$ konvergiert.

(iii) Berechnen Sie den Grenzwert $T(\cdot) = \lim_{n\to\infty} T_n(\cdot)$ und zeigen Sie, dass $T(\cdot)$ keine C_0-Halbgruppe ist.

Welche Voraussetzung des Satzes 3.9 (Trotter-Kato II) ist verletzt?

— **Bitte wenden!** —

Aufgabe 29:
Sei X der Banachraum der stetigen, abklingenden Funktionen

$$X := C_0(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C(\mathbb{R}) | \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0 \right\}$$

ausgestattet mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Auf diesem sei der Operator A durch

$$Af = f' \qquad \forall f \in D(A) := \left\{ f \in C^1(\mathbb{R}) \cap C_0(\mathbb{R}) | \, f' \in C_0(\mathbb{R}) \right\}$$

erklärt.

(a) Zeigen Sie, dass A die isometrische C_0-Halbgruppe $T(\cdot)$ mit

$$(T(t)f)(s) = f(t+s) \qquad \forall t \geq 0, \forall s \in \mathbb{R}, \forall f \in X$$

erzeugt.

(b) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei der Operator A_n durch

$$A_n f = \frac{T\left(\frac{1}{n}\right) - I}{\frac{1}{n}} f \qquad \forall f \in X$$

erklärt. Zeigen Sie, dass A_n die Kontraktionshalbgruppe $T_n(\cdot)$ erzeugt.

(c) Zeigen Sie, dass $T_n(t)f \xrightarrow{n \to \infty} T(t)f$ für alle $f \in X$ und alle $t \in [0, \infty)$, wobei die Konvergenz gleichmäßig auf kompakten t-Intervallen ist.

(d) Sei $b > 0$, $f \in X$ und $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie mit Hilfe der vorhergehenden Aufgabenteile, dass ein Polynom p existiert mit

$$\sup_{t \in [0,b]} |f(t) - p(t)| \leq \varepsilon.$$