Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
20.04.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 01. Übungsblatt

Lemma 1. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $C^1(I,\mathbb{K})$ mit*

$$\|f_n - f_m\|_{C^1(I,\mathbb{K})} := \|f_n - f_m\|_\infty + \left\|f_n' - f_m'\right\|_\infty \xrightarrow{(n,m)\to\infty} 0.$$

Dann existiert ein $f \in C^1(I,\mathbb{K})$ mit $\|f_n - f\|_{C^1(I,\mathbb{K})} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis. Siehe Analysis 1. □

Aufgabe 1:

(a) (i) Klar: X ist ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige Vollständigkeit: Sei dazu $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X. Lemma 1 iterativ angewandt auf $(f_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}}$ für $n \in \mathbb{N}_0$ liefert die Existenz von $f \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{K})$ mit $\left\|f_k^{(n)} - f^{(n)}\right\|_\infty \xrightarrow{k\to\infty} 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ existiert also ein $k_0(n,\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\left\|f_k^{(n)} - f^{(n)}\right\|_\infty < \varepsilon$ für jedes $k \geq k_0(n,\varepsilon)$. Da Cauchy-Folgen beschränkt sind, existiert ein $M > 0$ mit $\|f_k\|_X \leq M$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left\|f^{(n)}\right\|_\infty \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left[\left\|f^{(n)} - f_{k_0(n,1)}^{(n)}\right\|_\infty + \left\|f_{k_0(n,1)}^{(n)}\right\|_\infty\right] \leq 1 + M < \infty$$

und damit $f \in X$.

Es bleibt $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_X = 0$ zu zeigen. Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $\|f_k - f_m\|_X < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $k, m \geq k_1$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ wähle $m(n) := \max\left\{k_0(n,\frac{\varepsilon}{2}), k_1\right\}$. Dann gilt

$$\left\|f^{(n)} - f_k^{(n)}\right\|_\infty \leq \left\|f^{(n)} - f_{m(n)}^{(n)}\right\|_\infty + \left\|f_{m(n)}^{(n)} - f_k^{(n)}\right\|_\infty \leq \varepsilon.$$

□

(ii) Klar: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : X \to X$ ist linear. Zeige Stetigkeit: Für $f \in X$ gilt

$$\left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)\right\|_X = \sup_{n\in\mathbb{N}_0} \left\|\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f\right)^{(n)}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|f^{(n)}\right\| \leq \|f\|_X$$

Also ist $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \in \mathcal{L}(X)$ und $\left\|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right\| \leq 1$.

□

(iii) Seien $x, x_0 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Nach dem Satz von Taylor existiert ein $\xi \in [x_0, x] \cup [x, x_0]$ mit

$$\left| f(x) - \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \right| = \left| \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \right| \leq \frac{\|f\|_X}{(k+1)!} |x-x_0|^{k+1} \xrightarrow{k\to\infty} 0.$$

Folglich stellt die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$ von f für für jeden Entwicklungspunkt $x_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion f dar.

□

(b) Für $t \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left(e^{t\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}} f\right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \right)^n f \right)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x)}{n!}((t+x)-x)^n \overset{\text{(a) (iii)}}{=} f(t+x).$$

Lemma 2. *Für jedes* $1 \leq p < \infty$ *ist die Menge*

$$C_{cs}^{\infty}(1,\infty) = \{ f \in C^{\infty}(1,\infty) : \operatorname{supp}(f) \textit{ kompakt } \}$$

ist dicht in $L^p(1,\infty)$.

Beweis. Siehe Literatur. □

Aufgabe 2:

(a) Linearität von $T(t)$ für jedes $t \geq 0$ ist klar.

Für jedes $t \geq 0$ und jedes $f \in L^p(1,\infty)$ gilt nach dem Transformationssatz

$$\|T(t)f\|_p^p = \int_1^\infty \left|f(e^t x)\right|^p \mathrm{d}x = e^{-t} \int_{e^t}^\infty |f(x)|^p \mathrm{d}x \leq e^{-t} \int_1^\infty |f(x)|^p \mathrm{d}x = e^{-t} \|f\|_p^p .$$

Folglich ist $\|T(t)\| \leq e^{-\frac{t}{p}}$ für $t \geq 0$. Für $f_t := \mathbb{1}_{(e^t, e^t+1)}$ ist $\|f_t\|_p = 1$ und es gilt Gleichheit in der obigen Abschätzung. Also $\|T(t)\| \geq \|T(t)f_t\|_p = e^{-\frac{t}{p}}$ und damit $\|T(t)\| = e^{-\frac{t}{p}}$ für alle $t \geq 0$.

Damit ist $T(t) \in \mathcal{L}(L^p(1,\infty))$ für alle $t \geq 0$. Die Halbgruppeneigenschaft ist klar. Es bleibt die starke Stetigkeit in $t = 0$ nachzurechnen: Es gilt

$$\limsup_{t\to 0+} \|T(t)\| = \limsup_{t\to 0+} e^{-\frac{t}{p}} = 1 < \infty.$$

Setze $D = C_{\mathrm{cs}}^{\infty}(1,\infty)$. Sei $f \in D$, etwa $\operatorname{supp}(f) \subseteq (1,a)$ für ein $a > 1$. Es gilt

$$\lim_{t\to 0+} (T(t)f)(x) = \lim_{t\to 0+} f(e^t x) \overset{f\in C}{=} f(x) \qquad \forall x \in (1,\infty)$$

und

$$\begin{aligned} \|T(t)f - f\|_p^p &= \int_1^\infty \left|f(e^t x) - f(x)\right|^p \mathrm{d}x \leq \int_1^a \left(\left|f(e^t x)\right| + |f(x)|\right)^p \mathrm{d}x \\ &\leq \int_1^a (2\|f\|_\infty)^p \mathrm{d}x = 2^p \|f\|_\infty^p (a-1) < \infty \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$. Mit dem Satz von der majorisierten Konvergenz folgt

$$\lim_{t\to 0+} \|T(t)f - f\|_p = \lim_{t\to 0+} \left(\int_1^\infty \left|f(e^t x) - f(x)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\int_1^\infty \lim_{t\to 0+} \left|f(e^t x) - f(x)\right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

für alle $f \in D$. Die starke Stetigkeit in $t = 0$ folgt mit Lemma 1.7 der Vorlesung.

□

(b) Im Aufgabenteil (a) wurde $\|T(t)\| = e^{-\frac{t}{p}}$ für alle $t \geq 0$ gezeigt. Folglich ist $\omega_0(T) = -\frac{1}{p}$.

Lemma 3. *Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum,*

$$l^2(X) = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} : \|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\| := \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_X^2} < \infty \right\},$$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}(X)$ und $A : l^2(X) \to X^{\mathbb{N}}$ mit $A(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(X)$. Dann ist $l^2(X)$ ein Banachraum und $A \in \mathcal{L}(l^2(X))$ genau dann, wenn $(\|A_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. In diesem Fall ist $\|A\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$.

Beweis. Klar: $l^2(X)$ ist ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum. Zeige Vollständigkeit: Sei dazu $(x^k)_{k\in\mathbb{N}} := ((x_n^k)_{n\in\mathbb{N}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $l^2(X)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiere etwa ein $k_0(\varepsilon)$, so dass $\left\|x^k - x^m\right\| < \varepsilon$ für alle $k, m \geq k_0(\varepsilon)$.

Wegen $\left\|x_n^k - x_n^m\right\|_X \leq \left\|x^k - x^m\right\|$ für alle $k, n, m \in \mathbb{N}$, ist $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da X vollständig ist, existiert der Grenzwert $x_n := \lim_{k\to\infty} x_n^k \in X$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Zeige $x := (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(X)$. Da Cauchy-Folgen beschränkt sind, ist $M := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\|(x_n^k)_{n\in\mathbb{N}}\right\| < \infty$. Für jedes $k, N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n\|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^k\|^2} + \underbrace{\sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n^k\|^2}}_{\leq \|x^k\|} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^k\|^2} + M.$$

Der Grenzwertübergang $k \to \infty$ liefert $\sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n\|^2} \leq M$ für jedes $N \in \mathbb{N}$ und folglich $\|x\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|^2} \leq M < \infty$.

Zeige $\lim_{k\to\infty} \left\|x^k - x\right\| = 0$: Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$. Für $k, m \geq k_0(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^k\|^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^m\|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n^m - x_n^k\|^2} \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^m\|^2} + \left\|x^m - x^k\right\| < \sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^m\|^2} + \varepsilon. \end{aligned}$$

Der Grenzwertübergang $m \to \infty$ liefert $\sqrt{\sum_{n=1}^N \|x_n - x_n^k\|^2} \leq \varepsilon$ für alle $k \geq k_0(\varepsilon)$ und alle $N \in \mathbb{N}$. Folglich ist $\left\|x - x^k\right\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \|x_n - x_n^k\|^2} \leq \varepsilon$ für $k \geq k_0(\varepsilon)$.

Linearität von A ist klar. Gelte nun $S := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\| < \infty$. Sei $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(X)$. Es gilt $\|Ax\| = \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \|A_n x_n\|_X^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^\infty \|A_n\|^2 \|x_n\|_X^2} \leq S\sqrt{\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_X^2} = S\|x\| < \infty$. Also ist $Ax \in l^2(X)$. Ferner zeigt die Abschätzung, dass A stetig ist und $\|A\| \leq S$.

Sei jetzt umgekehrt A stetig. Es existiert ein $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass $\lim_{k\to\infty} \|A_{n_k}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n\|$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ existiert ein $x_k \in X$ mit $\|x_k\|_X = 1$ derart, dass $\|A_{n_k}\| \geq \left(\|A_{n_k} x_k\|_X - \frac{1}{k}\right)$. Definiere $x^k := (\delta_{nn_k} x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ und beobachte $\left\|x^k\right\| = 1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\infty > \|A\| \geq \lim_{k\to\infty} \left\|Ax^k\right\| = \lim_{k\to\infty} \|A_{n_k} x_k\|_X \geq \lim_{k\to\infty} \left(\|A_{n_k}\| - \frac{1}{k}\right) = S.$$

□

Aufgabe 3:

(a) Klar: $T(0) = \mathrm{id}_{l^2(\mathbb{C}^2)} \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{C}^2))$. Für $t > 0$ gilt wegen der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{C}^{2\times 2}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\|A_n(t)\| \lesssim \|A_n(t)\|_\infty = \left\|\begin{pmatrix} e^{-nt} & tn^\beta e^{-nt} \\ 0 & e^{-nt} \end{pmatrix}\right\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

da alle Einträge der Matrix $A_n(t)$ gegen Null konvergieren für $n \to \infty$. Folglich ist $S(t) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(t)\| < \infty$. Nach Lemma 3 (mit $X = \mathbb{C}^2$), ist $T(t) \in \mathcal{L}(l^2(\mathbb{C}^2))$ und $\|T(t)\| = S(t)$.

Ferner gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $t, s \geq 0$

$$A_n(t)A_n(s) = \begin{pmatrix} e^{-nt} & tn^\beta e^{-nt} \\ 0 & e^{-nt} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-ns} & sn^\beta e^{-ns} \\ 0 & e^{-ns} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-n(t+s)} & (t+s)n^\beta e^{-n(t+s)} \\ 0 & e^{-n(t+s)} \end{pmatrix}.$$

Damit erfüllt die Operatorfamilie $(T(t))_{t\geq 0}$ die Halbgruppeneigenschaft.

□

(b) Sei $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = xe^{-x}$ für alle $x \in [0,\infty)$. Nachrechnen liefert $\sup_{x\in[0,\infty)} |f(x)| = \frac{1}{e} = f(1)$.

Sei $0 \leq \beta \leq 1$. Für $t \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} \|T(t)\| &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(t)\| \lesssim \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\|\begin{pmatrix} e^{-nt} & tn^\beta e^{-nt} \\ 0 & e^{-nt} \end{pmatrix}\right\|_\infty \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \max\left\{1, tn^\beta e^{-nt}\right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \max\left\{1, n^{\beta-1} f(nt)\right\} \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \max\left\{1, \frac{n^{\beta-1}}{e}\right\} \overset{0\leq\beta\leq 1}{\leq} 1 < \infty. \end{aligned}$$

Also ist $\limsup_{t\to 0+} \|T(t)\| < \infty$.

Wähle $D = \left\{(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C}^2) \,|\, \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : x_n = y_n = 0\right\}$. Klar D dicht in $l^2(\mathbb{C})$ und $\lim_{t\to 0+} \|T(t)x - x\| = 0$ für jedes $x \in D$. Nach Lemma 1.7 der Vorlesung ist $(T(t))_{t\geq 0}$ stark stetig.

Sei nun $\beta > 1$. Definiere $t_m := \frac{1}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $\lim_{m\to\infty} = 0$ und

$$\begin{aligned}
\limsup_{t\to 0+} \|T(t)\| &\geq \lim_{m\to\infty} \|T(t_m)\| \geq \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|A_n(t_m)\| \\
&\geq \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\| \begin{pmatrix} e^{-nt_m} & t_m n^\beta e^{-nt_m} \\ 0 & e^{-nt_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \geq \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} t_m n^\beta e^{-nt_m} \\
&= \lim_{m\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} n^{\beta-1} f(nt_m) \overset{n=m}{\geq} \lim_{m\to\infty} m^{\beta-1} \underbrace{f(mt_m)}_{=f(1)} = \lim_{m\to\infty} \frac{m^{\beta-1}}{e} \overset{\beta\geq 1}{=} \infty.
\end{aligned}$$

Nach Lemma 1.5 der Vorlesung kann damit $(T(t))_{t\geq 0}$ nicht stark stetig sein.

(c) Sei $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$. Dann gilt per Definition

$$A(x_n, y_n) = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} - (x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}}{t} \in l^2(\mathbb{C}^2).$$

Da Konvergenz in $l^2(\mathbb{C}^2)$ „komponentenweise" Konvergenz impliziert, gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$[A(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}]_m = \lim_{t\to t+} \begin{pmatrix} \frac{e^{-mt}-1}{t} & m^\beta e^{-mt} \\ 0 & \frac{e^{-mt}}{t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -m & m^\beta \\ 0 & -m \end{pmatrix}}_{=:A_m} \begin{pmatrix} x_m \\ y_m \end{pmatrix}.$$

Damit ist $A : D(A) \to l^2(\mathbb{C}^2)$ gegeben durch $A(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Behauptung $D(A) = \{(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C}^2) : (n(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C}^2)\}$.

Sei zunächst $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$. Dann gilt nach obiger Rechnung $(A_n(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C})$. Insbesondere ist $(-ny_n)_{n\in\mathbb{N}}, (-nx_n + n^\beta y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C})$. Wegen

$$\begin{aligned}
\|(nx_n)_{n\in\mathbb{N}}\| &\leq \left\|(-nx_n + n^\beta y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\| + \left\|(n^\beta y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\| \\
&\overset{0\leq\beta\leq 1}{\leq} \left\|(-nx_n + n^\beta y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\| + \|(ny_n)_{n\in\mathbb{N}}\| < \infty
\end{aligned}$$

ist auch $(nx_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C})$. Weshalb $(n(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C}^2)$ gilt.

Sei nun umgekehrt $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}, (n(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{C}^2)$. Für jedes $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt mit Hilfe des Mittelwertsatzes

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right\| &= \left\| \begin{pmatrix} n(1 - e^{-\xi t}) & n^\beta(e^{-nt} - 1) \\ 0 & n(1 - e^{-\xi t}) \end{pmatrix} \right\| \\
&\lesssim \left\| \begin{pmatrix} n(1 - e^{-\xi t}) & n^\beta(e^{-nt} - 1) \\ 0 & n(1 - e^{-\xi t}) \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&= n \max\left\{ \left|1 - e^{-\xi t}\right|, \left|n^{\beta-1}(1 - e^{-nt})\right| \right\} \overset{0\leq\beta\leq 1}{\leq} n.
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sum_{n=N+1}^\infty n^2(|x_n|^2 + |y_n|^2) < \varepsilon$

ausfällt. Es folgt

$$
\begin{aligned}
& \limsup_{t\to 0+} \left\| \frac{T(t)(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} - (x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}}{t} - (A_n(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \right\| \\
\leq\ & \limsup_{t\to 0+} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left\| \left(\frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \left(\frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2} \\
\leq\ & \limsup_{t\to 0+} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left\| \left(\frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} \left\| \left(\frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right) \right\|^2 \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2} \\
\leq\ & \limsup_{t\to 0+} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left\| \left(\frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2} + \sqrt{\sum_{n=N+1}^{\infty} n^2 \left\| \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2} \\
\leq\ & \varepsilon + \underbrace{\limsup_{t\to 0+} \sqrt{\sum_{n=1}^{N} \left\| \left(\frac{1}{t}(A_n(t) - I_2) - A_n \right) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \right\|^2}}_{=0} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig war, folgt

$$
\lim_{t\to 0+} \left\| \frac{1}{t} \left(T(t)(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} - (x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) - (A_n(x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}} \right\| = 0
$$

und damit $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)$.

Aufgabe 4:

(a) Da $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, ist $(\|T_n x\|_Y)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt für jedes $x \in X$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit ist $S := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$. Es gilt nun

$$
\begin{aligned}
\|T_n x_n - Tx\|_Y &\leq \|T_n x_n - T_n x\|_Y + \|T_n x - Tx\|_Y \leq \|T_n\| \, \|x_n - x\|_X + \|T_n x - Tx\|_Y \\
&\leq S \, \|x_n - x\|_X + \|T_n x - Tx\|_Y \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}
$$

□

(b) Sei $(t,x) \in I \times X$. Da I ein Intervall ist, existiert ein $a > 0$ derart, dass $J := [t-a, t+a] \cap I$ kompakt ist. Da $J \to Y$, $s \mapsto \|S(s)x\|_Y$ stetig ist, ist $(\|S(s)x\|_Y)_{s\in J}$ beschränkt für alle $x \in X$. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit, ist $M := \sup_{s\in J} \|S(s)\| < \infty$. Es folgt für $(s,y) \in J \times X$

$$
\begin{aligned}
\|S(t)x - S(s)y\|_Y &\leq \|S(t)x - S(s)x\|_Y + \|S(s)x - S(s)y\|_Y \\
&\leq \|S(t)x - S(s)x\|_Y + \|S(s)\| \, \|x - y\|_X \\
&\leq \|S(t)x - S(s)x\|_Y + M \, \|x - y\|_X \xrightarrow{(s,y)\to(t,x)} 0
\end{aligned}
$$

□