Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
27.04.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 02. Übungsblatt

Aufgabe 5:

(a) Sei $S := \inf_{t>0} \frac{\log(\omega(t))}{t}$ und $M := \sup_{0<t\leq 1} \omega(t) < \infty$. Ist $t \in \mathbb{N}$, so gilt $\omega(t) \leq \omega(1)^t \leq |M|^t < \infty$. Ist $t \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$, so gilt $\omega(t) = \omega(\lfloor t \rfloor + (t - \lfloor t \rfloor)) \leq \omega(1)^{\lfloor t \rfloor} \omega(t - \lfloor t \rfloor) \leq |M|^{t+1} < \infty$. Also ist ω auf allen endlichen Intervallen nach oben beschränkt.

Angenommen $\omega(t) = 0$ für ein $t \in (0, \infty)$. Dann ist $S = -\infty$. Nach Voraussetzung gilt dann $\omega(t+s) \leq \omega(t)\omega(s) = 0$ für jedes $s > 0$. Also ist auch $\lim_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t} = -\infty$. O.B.d.A gelte also $\omega : (0, \infty) \to (0, \infty)$.

Klar:

$$S \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t} \leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t}.$$

Es bleibt

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t} \leq S$$

zu zeigen. Wir machen die Fallunterscheidung

- $S > -\infty$: Zeige dann: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t} \leq S + \varepsilon.$$

Es existiert ein $t \in (0, \infty)$ mit $\frac{\log(\omega(t))}{t} < S + \varepsilon$. Dann ist nach Obigem $M' := \sup_{0<s\leq t} \omega(s) < \infty$. Sei nun $x \in [t, \infty)$ beliebig. Es gibt dann $k(x) := \lfloor \frac{x}{t} \rfloor \in \mathbb{N}$ und $s(x) := x - k(x)t \in [0, t)$ mit $x = k(x)t + s(x)$. Ist $s(x) > 0$, so folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\log(\omega(x))}{x} &= \frac{\log(\omega(k(x)t + s(x)))}{k(x)t + s(x)} \leq \frac{k(x)\log(\omega(t))}{k(x)t + s(x)} + \frac{\log(\omega(s(x)))}{k(x)t + s(x)} \\
&\leq \frac{k(x)\log(\omega(t))}{k(x)t + s(x)} + \frac{\log(M')}{x} = \frac{\log(\omega(t))}{t} \cdot \frac{x - s(x)}{x} + \frac{\log(M')}{x} \\
&\leq (S + \varepsilon)\left(1 - \frac{s(x)}{x}\right) + \frac{\log(M')}{x}.
\end{aligned}$$

Ist $s(x) = 0$, so gilt ebenfalls

$$\frac{\log(\omega(x))}{x} \leq (S + \varepsilon)\left(1 - \frac{s(x)}{x}\right) \leq (S + \varepsilon)\left(1 - \frac{s(x)}{x}\right) + \frac{\log(M')}{x}.$$

Also ist in der Tat

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log(\omega(x))}{x} \leq \lim_{x\to\infty} \left[(S + \varepsilon)\left(1 - \frac{s(x)}{x}\right) + \frac{\log(M')}{x}\right] = S + \varepsilon.$$

- $S = -\infty$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existiert ein $t \in (0,\infty)$ mit $\frac{\log(\omega(t))}{t} \le -n$. Setze wieder $M' := \sup_{0<s\le t}\omega(s) < \infty$. Mit dem gleichen Argument wie im Fall $S > -\infty$ (ersetze $S+\varepsilon$ durch $-n$) folgt

  $$\limsup_{x\to\infty} \frac{\log(\omega(x))}{x} \le \lim_{x\to\infty} \left[(-n)\left(1 - \frac{s(x)}{x}\right) + \frac{\log(M')}{x}\right] = -n.$$

  Folglich ist in der Tat $\limsup_{x\to\infty} \frac{\log(\omega(x))}{x} = -\infty$.

□

Betrachte $\omega : (0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $\omega(t) = \|T(t)\|$ für alle $t > 0$. Nach Lemma 1.5 der Vorlesung ist ω beschränkt auf $(0,1]$. Ferner gilt

$$\omega(t+s) = \|T(t+s)\| = \|T(t)T(s)\| \le \|T(t)\|\,\|T(s)\| = \omega(t)\omega(s)$$

für alle $t, s > 0$. Nach obiger Aussage gilt also

$$S := \inf_{t>0} \frac{\log(\omega(t))}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(\omega(t))}{t}.$$

Per Definition 1.9 der Vorlesung gilt

$$\begin{aligned}\omega_0(T) &= \inf\left\{\omega \in \mathbb{R} \,|\, \exists M \ge 1 : \forall t \ge 0 : \|T(t)\| \le Me^{\omega t}\right\} \\ &= \inf \underbrace{\left\{\omega \in \mathbb{R} \,|\, \exists C \ge 0 : \forall t > 0 : \frac{\log(\|T(t)\|)}{t} \le \frac{C}{t} + \omega\right\}}_{=:A}.\end{aligned}$$

Für jedes $\omega \in A$ gilt folglich

$$S = \lim_{t\to\infty} \frac{\log(\|T(t)\|)}{t} \le \omega.$$

Also ist $S \le \omega_0(T)$. Zeige $\omega_0(T) \le S$. Wir machen die Fallunterscheidung

- $S > -\infty$: Zeige dann: für jedes $\varepsilon > 0$ ist

  $$\omega_0(T) \le S + \varepsilon.$$

  Es existiert ein $t_0 > 0$ derart, dass

  $$\frac{\log(\|T(t)\|)}{t} < S + \varepsilon$$

  für alle $t \ge t_0$. Da $t \mapsto \|T(t)\|$ nach Lemma 1.7 der Vorlesung auf $(0, t_0)$ beschränkt ist, existiert ein $C \ge 0$ derart, dass

  $$\frac{\log(\|T(t)\|)}{t} \le \frac{C}{t}$$

  für alle $(0, t_0)$ gilt. Folglich ist

  $$\frac{\log(\|T(t)\|)}{t} \le \frac{C}{t} + S + \varepsilon$$

  für alle $t > 0$. Also ist $S + \varepsilon \in A$ und damit $\omega_0(T) \le S + \varepsilon$.

- $S = -\infty$: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann existiert ein $t_0 > 0$ derart, dass $\frac{\log(\|T(t)\|)}{t} \leq -n$ für alle $t \geq t_0$. Mit dem gleichen Argument wie im Fall $S > -\infty$ (ersetze $S + \varepsilon$ durch $-n$) folgt $-n \in A$. Folglich ist in der Tat $\omega_0(T) = -\infty$.

$\square$

(b) Sei $a := \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{a_n}$. Klar

$$a \leq \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}.$$

Es bleibt $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a$ bzw.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq a + \varepsilon$$

für alle $\varepsilon > 0$ zu zeigen. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ derart, dass $\sqrt[N]{a_N} < a + \varepsilon$. Setze $M := \max\{a_1, \ldots a_{N-1}\}$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $m(n) \in \mathbb{N}_0$ und ein $k(n) \in \{0, \ldots, N-1\}$ derart, dass $n = m(n)N + k(n)$. Es folgt

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a_{m(n)N+k(n)}} \leq \sqrt[n]{a_N^{m(n)} a_{k(n)}} \leq \sqrt[n]{a_{k(n)}}\, \left(\sqrt[N]{a_N}\right)^{\frac{m(n)N}{n}} \leq \sqrt[n]{M}\,(a+\varepsilon)^{1-\frac{k(n)}{n}}.$$

Also in der Tat

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \lim_{n\to\infty} \left[\sqrt[n]{M}\,(a+\varepsilon)^{1-\frac{k(n)}{n}}\right] \leq a + \varepsilon.$$

$\square$

Wende die obige Aussage auf die Folge $(\|T^n\|)_{n\in\mathbb{N}]}$ an. Es folgt

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|T^n\|} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sqrt[n]{\|T^n\|} < \infty.$$

$\square$

Satz 4. *von der offenen Abbildung (Banach-Schauder)*
Seien X, Y Banachräume, $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Es gilt

$$T \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow T \text{ ist offen.} \tag{1}$$

Beweis. Siehe Funktionalanalysis. $\square$

Korollar 5. *Sei X ein Vektorraum und $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : X \to \mathbb{R}_0^+$ Normen auf X derart beschaffen, dass $(X, \|\cdot\|_1), (X, \|\cdot\|_2)$ Banachräume sind. Dann sind $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent.*

Beweis. Definiere $\|\cdot\|_3 : X \to \mathbb{R}_0^+$ durch $\|x\|_3 := \|x\|_1 + \|x\|_2$ für alle $x \in X$. Klar: $\|\cdot\|_3$ ist eine Norm auf X und $(X, \|\cdot\|_3)$ ist ein Banachraum. Zeige $\|\cdot\|_i$ und $\|\cdot\|_3$ sind äquivalent für $i \in \{1, 2\}$.

Sei also $i \in \{1, 2\}$. Betrachte die Abbildung $\mathrm{id} : (X, \|\cdot\|_3) \to (X, \|\cdot\|_i)$ mit $\mathrm{id}(x) = x$ für alle $x \in X$. Klar: id ist linear und bijektiv. Wegen

$$\|\mathrm{id}(x)\|_i = \|x\|_i \leq \|x\|_1 + \|x\|_2 = \|x\|_3 \qquad \forall x \in X,$$

ist id stetig. Nach Satz 4 ist id offen, also $\mathrm{id}^{-1} : (X, \|\cdot\|_i) \to (X, \|\cdot\|_3)$ stetig. Da id^{-1} ebenfalls linear ist, existiert also eine Konstante $C > 0$ derart, dass

$$\left\|id^{-1}(x)\right\|_3 = \|x\|_1 + \|x\|_2 \leq C\,\|x\|_i \qquad \forall x \in X.$$

Also sind $\|\cdot\|_3$ und $\|\cdot\|_i$ in der Tat äquivalent. $\square$

Satz 6. *vom abgeschlossenen Graphen*
Seien X, Y Banachräume, $D(A) \subseteq X$ ein linearer Unterraum von X und $A : D(A) \to Y$ ein abgeschlossener linearer Operator. Dann gilt

$$D(A) = X \Rightarrow A \in \mathcal{L}(X, Y).$$

Beweis. Siehe Funktionalanalysis. □

Aufgabe 6:

(a) Da A, B abgeschlossen sind, sind $(D(A), \|\cdot\|_A)$, $(D(B), \|\cdot\|_B) = (D(A), \|\cdot\|_B)$ Banachräume. Nach Korollar 5 sind $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ äquivalent.

□

(b) Halte zunächst fest $D(A^{-1}) = \text{Bild}(A)$. Zeige nun A^{-1} ist abgeschlossen. Sei dazu $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A^{-1})$ derart, dass $y_n \to y$ und $A^{-1}y_n \to z$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist, dass $y \in D(A^{-1})$ und $A^{-1}y = z$. Definiere dazu $x_n := Ay_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dies ist eine Folge in $D(A)$. Nach Voraussetzung gilt $x_n \to z$ und $Ax_n = AA^{-1}y_n = y_n \to y$. Da A abgeschlossen ist, ist $z \in D(A)$ und $Az = y$. Damit ist aber $y \in \text{Bild}(A) = D(A^{-1})$ und $A^{-1}y = z$.

□

(c) Da B abgeschlossen ist, ist $(D(B), \|\cdot\|_B)$ ein Banachraum. Da B bijektiv — also insbesondere surjektiv — ist, ist B nach Satz 4 offen und damit $B^{-1} : (X, \|\cdot\|_X) \to (D(B), \|\cdot\|_B)$ stetig. Nach Aufgabenteil (a) sind $\|\cdot\|_A$ und $\|\cdot\|_B$ äquivalent. Also ist $B^{-1} : (X, \|\cdot\|_X) \to (D(A), \|\cdot\|_A)$ stetig. Da A abgeschlossen ist, ist $A : (D(A), \|\cdot\|_A) \to (X, \|\cdot\|)_X$ stetig. Damit ist die Komposition $AB^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

(d) Es ist $D(B^{-1}) = \text{Bild}(B)$. Berechne

$$D(AB^{-1}) = \left\{ x \in D(B^{-1}) | \underbrace{B^{-1}x}_{\in D(B) \subseteq D(A)} \in D(A) \right\} = \text{Bild}(B).$$

Nach Teilaufgabe (b) ist A^{-1} abgeschlossen. Da $D(A^{-1}) = X$ ist, ist A^{-1} nach Satz 6 stetig. Zeige nun AB^{-1} ist abgeschlossen. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(AB^{-1})$ mit $x_n \to x$ und $AB^{-1}x_n \to y$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist, dass $x \in D(AB^{-1})$ und $AB^{-1}x = y$. Definiere dazu $y_n := B^{-1}x_n \in D(B) = D(A)$ für $n \in \mathbb{N}$. Da A^{-1} stetig ist und $Ay_n \to y$ für $n \to \infty$, gilt $y_n = A^{-1}Ay_n \to A^{-1}y$. Da B^{-1} abgeschlossen ist (nach Teilaufgabe (b)) gilt $x \in D(B^{-1}) = D(AB^{-1})$ und $B^{-1}x = A^{-1}y$. Da A bijektiv ist, folgt $AB^{-1}x = y$.

□