Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
04.05.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 03. Übungsblatt

Lemma 7. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a, s \in C(I)$, $x_0 \in I$ und $y_0 \in \mathbb{C}$. Dann hat das Anfangswertproblem*

$$\begin{aligned} y'(x) &= a(x)y(x) + s(x) \quad (x \in I), \\ y(x_0) &= y_0 \end{aligned}$$

genau eine Lösung $y \in C^1(I)$, welche durch

$$y(x) = y_0 e^{\int_{x_0}^x a(t)\mathrm{d}t} + e^{\int_{x_0}^x a(t)\mathrm{d}t} \int_{x_0}^x e^{-\int_{x_0}^u a(t)\mathrm{d}t} g(u)\mathrm{d}u \tag{1}$$

für alle $x \in I$ gegeben ist.

Beweis. Siehe Analysis II. □

Satz 8. *von Stone-Weierstraß*
Sei (X, τ) ein kompakter Hausdorff-Raum und $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ sei derart beschaffen, dass

- $f \equiv 1 \in \mathcal{A}$,
- *für jedes $f, g \in \mathcal{A}$ und jedes $\alpha \in \mathbb{K}$ sind $f + g, f \cdot g, \alpha f, \overline{f} \in \mathcal{A}$ und*
- *für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ existiert ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq f(y)$.*

Dann ist $\mathcal{A}$ dicht in $C(X)$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$.

Beweis. Siehe Literatur. □

Lemma 9. *Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $J = [a, b]$ und $T : I \to C(J)$ stetig bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Dann ist $u : J \times I \to \mathbb{C}$ definiert durch $u(x, t) = T(t)(x)$ für alle $(x, t) \in J \times I$ stetig.*

Beweis. Sei $(x, t) \in J \times I$ und $\varepsilon > 0$. Da $T : I \to C(J)$ stetig ist bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$, existiert ein $\delta_1 > 0$ derart, dass $\|T(s) - T(t)\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $s \in I \cap (t - \delta_1, t + \delta_1)$ ausfällt.

Da $T(t) \in C(J)$ gilt, existiert ein $\delta_2 > 0$ derart, dass $|T(t)(x) - T(t)(y)| = |u(x, t) - u(y, t)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $y \in J \cap (x - \delta_2, x + \delta_2)$ ausfällt. Sei $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} |u(y, s) - u(x, t)| &\leq \underbrace{|u(y, s) - u(y, t)|}_{\leq \|u(\,\cdot\,, s) - u(\,\cdot\,, t)\|_\infty} + \underbrace{|u(y, t) - u(x, t)|}_{< \frac{\varepsilon}{2}} \\ &\leq \|u(s) - u(t)\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle (y, s) mit $y \in J \cap (x - \delta, x + \delta)$ und $s \in I \cap (t - \delta, t + \delta)$. Also ist $u : J \times I \to \mathbb{C}$ in der Tat stetig. □

Aufgabe 7:

(a) (i) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A)$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ und $Af_n = -f_n' \xrightarrow{n\to\infty} g$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zu zeigen ist $f \in D(A)$ — also $f \in C^1([0,1])$ und $f(0) = 0$ — und $Af = g$ — also $-f' = g$.

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind bezüglich der Supremumsnorm, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^1([0,1])}$. Nach Lemma 1 der Übung ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent gegen ein $h \in C^1([0,1])$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^1([0,1])}$. Wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes ist dann aber $h = f$ und $-h' = -f' = Af = g$.

Da gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz impliziert, gilt

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

$\square$

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C}$. Es gilt $\lambda \in \rho(A)$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} & \forall g \in X : \exists! f \in D(A) : \quad (\lambda I - A)f &=& \; g \\ \Leftrightarrow\; & \forall g \in C([0,1]) : \exists! f \in C^1([0,1]) : \quad f(0) = 0 \wedge \forall x \in [0,1] : f'(x) &=& \; -\lambda f + g. \end{aligned}$$

Nach Lemma 7 ist dies der Fall. Also ist $\rho(A) = \mathbb{C}$ und $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$.

Für jedes $g \in X$ ist, ebenfalls nach Lemma 7, $R(\lambda, A)g$ durch

$$(R(\lambda, A))\, g(x) = \left((\lambda I - A)^{-1} g\right)(x) = e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda s} g(s) \mathrm{d}s$$

für alle $x \in [0,1]$ gegeben.

(iii) Seien $\lambda > 0$, $g \in X$ und $x \in [0,1]$. Nach vorhergehender Teilaufgabe gilt

$$\begin{aligned} |(R(\lambda, A)g)(x)| &= \left| e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda s} g(s) \mathrm{d}s \right| \le e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda s} |g(s)| \,\mathrm{d}s \\ &\le e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda s} \|g\|_\infty \,\mathrm{d}s = \|g\|_\infty e^{-\lambda x} \left[\frac{e^{\lambda x} - 1}{\lambda} \right] \\ &= \|g\|_\infty \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \le \|g\|_\infty \frac{1}{\lambda} \left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ &\le \|g\|_\infty \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Folglich ist $\|R(\lambda, A)g\|_\infty \le \frac{\|g\|_\infty}{\lambda}$ für alle $\lambda > 0$ und $g \in X$. Damit ist auch

$$\|R(\lambda, A)\| = \sup\left\{ \|R(\lambda, A)g\|_\infty \,|\, g \in X \wedge \|g\|_\infty = 1 \right\} \le \frac{1}{\lambda}.$$

$\square$

(iv) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A)^{\mathbb{N}}$ mit $f_n \to f \in X$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Dann gilt

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

Folglich ist etwa $\mathbb{1}_{[0,1]} \in X \setminus \overline{D(A)} \neq \emptyset$. Nach Lemma 1.12 (c) der Vorlesung, ist aber der Erzeuger einer C_0-Halbgruppe dicht definiert.

(b) (i) Versuche den Satz 1.16 der Vorlesung (Hille-Yosida) anzuwenden (mit $\omega = 0$, $M = 1$). Überprüfe dafür seine Voraussetzungen.

Klar: $(X_0, \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum.

Zeige $D(A_0)$ ist dicht in X_0. Betrachte dazu

$$\mathcal{A} = \left\{ x \mapsto \sum_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \,|\, n \in \mathbb{N} \wedge \alpha_0, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K} \wedge \alpha_1 = 0 \right\} \subseteq C^\infty([0,1]).$$

Klar: $\mathcal{A}$ erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 8. Also ist $\mathcal{A}$ dicht in X. Auch klar: $p'(0) = 0$ für alle $p \in \mathcal{A}$. Sei nun $f \in X_0 \subseteq X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Obigem existiert ein $p \in \mathcal{A}$ mit $\|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Insbesondere ist $|p(0)| = |f(0) - p(0)| \leq \|f - p\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$. Dann ist aber $g := p - p(0) \in D(A_0)$ und erfüllt die Abschätzung $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$.

Zeige: A_0 ist abgeschlossen. Wir erkennen A_0 ist der Teil A_{X_0} von A in $X_0 = \overline{D(A)}$ (siehe Aufgabe 8). Da A abgeschlossen in X nach Teilaufgabe (a) (i) ist, ist A_0 abgeschlossen in X_0 nach Aufgabe 8 (a) (i).

Zeige: $\rho(A_0) = \mathbb{C}$ und $\|R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{1}{\lambda}$ für jedes $\lambda > 0$. Sei dazu $\lambda > 0$. Klar: $(\lambda I - A_0) = (\lambda I - A)_{X_0}$. Nach Teilaufgabe (ii), ist $(\lambda I - A)$ bijektiv und $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$. Für jedes $g \in X_0$ ist $(R(\lambda, A)g)(0) = e^{-\lambda 0} \int_0^0 e^{\lambda s} g(s) \mathrm{d}s = 0$. Also ist $R(\lambda, A)X_0 \subseteq X_0$. Nach Aufgabe 8 (ii) ist also $(\lambda I - A)_{X_0} : D(A_0) \to X_0$ bijektiv und $(\lambda I - A)_{X_0}^{-1} = (\lambda I - A_{X_0})^{-1} = R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)_{X_0}$. Folglich ist $\lambda \in \rho(A_0)$. Als Einschränkung von $R(\lambda, A)$ erfüllt $R(\lambda, A_0)$ die Abschätzung $\|R(\lambda, A_0)\| \leq \frac{1}{\lambda}$.

(ii) Sei $(T(t))_{t \geq 0}$ die von A_0 erzeugte Halbgruppe und $x \in D(A_0)$. Nach Satz 1.11 der Vorlesung ist $T(\cdot)f$ für jedes $f \in D(A_0)$ die eindeutige Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u'(t) &= A_0 u(t) \qquad (t \geq 0), \\ u(0) &= f \end{aligned}$$

mit $u \in C^1([0,\infty), X_0)$ und $u(t) \in D(A_0)$ für alle $t \geq 0$. Wir wollen die Lösungen des obigen Cauchyproblems näher untersuchen. Sei also $f \in D(A_0)$ und u eine Lösung des obigen Cauchyproblems. Setze $u(x,t) := u(t)(x)$ für alle $x \in [0,1]$ und alle $t \geq 0$ und identifiziere $u : [0,\infty) \to X_0$ mit $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$.

Nach Lemma 9 ist $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ stetig.

Zeige: $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ ist in jedem $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ ggf. einseitig stetig partiell nach t differenzierbar mit $\frac{\partial u}{\partial t} = u'(t)(x)$. Sei dazu $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \left| \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h} - u'(t)(x) \right| &= \lim_{h \to 0} \left| \frac{u(t+h)(x) - u(t)(x)}{h} - u'(t)(x) \right| \\ &\leq \lim_{h \to 0} \left\| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right\|_\infty = 0, \end{aligned}$$

wobei der obige Limes für $t = 0$ einseitig zu verstehen ist. Die Stetigkeit von $\frac{\partial u}{\partial t}$ folgt aus der Stetigkeit von $u' : [0,\infty) \to X_0$ nach Lemma 9.

Zeige: $u : [0,1] \times [0,\infty) \to \mathbb{C}$ ist in jedem $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ ggf. einseitig stetig nach x differenzierbar mit $\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (-A_0 u(t))(x)$. Da $u(t) \in D(A_0) \subseteq C^1([0,1])$ für alle $t \geq 0$, existiert die ggf. einseitige partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x}$. Da u eine Lösung des Cauchyproblems ist, ist $-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t) = (A_0 u(t))(x) = u'(t)(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)$ für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$. Insbesondere ist $\frac{\partial u}{\partial x}$ stetig.

Insgesamt ist also $u \in C^1([0,1] \times [0,\infty))$. Zeige nun:

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x-t) & \text{für } 0 \le t \le x, \\ 0 & \text{für } t > x \end{cases}$$

für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$. Sei dazu $x \in [0,1]$.

Wegen $\frac{\partial u}{\partial t}(0,t) = 0$ für alle $t \ge 0$ und $u(0) = f(0) = 0$, ist $u(0,t) = 0$ für alle $t \ge 0$. Für $t > x$ sei $w : [0,x] \to \mathbb{C}$ gegeben durch $w(s) = u(x-s, t-s)$ für alle $s \in [0,x]$. Dann ist $w \in C([0,x]) \cap C^1((0,x))$ und

$$w'(s) = -\frac{\partial u}{\partial x}(x-s, t-s) - \frac{\partial u}{\partial t}(x-s, t-s) = 0$$

für alle $s \in (0,x)$. Also ist $u(x,t) = w(0) = w(x) = u(0, t-x) = 0$. Für $0 \le t \le x$ betrachte $w : [0,t] \to \mathbb{C}$ definiert durch $w(s) = u(x-s, t-s)$ für alle $s \in [0,t]$. Wieder ist $w' = 0$ für alle $s \in (0,t)$ und $u(x,t) = w(0) = w(x-t, 0) = f(x-t)$.

Da $D(A_0)$ dicht in X_0 ist, ist

$$(T(t)f)(x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{für } 0 \le t \le x, \\ 0 & \text{für } t > x \end{cases}$$

für alle $x \in [0,1]$, $t \ge 0$ und $f \in X_0$.

(iii) Angenommen A erzeugte eine C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t \ge 0}$. Dann wäre $u = S(\cdot)f$ die eindeutige Lösung des Cauchyproblems

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t) \qquad t \ge 0, \\ u(0) &= f \end{aligned}$$

für jedes $f \in D(A)$. Die Argumentation der letzten Teilaufgabe zeigt (an keiner Stelle wurde $f'(0) = 0$ ausgenutzt), dass

$$(S(t)f)(x) = \begin{cases} f(x-t) & \text{für } 0 \le t \le x, \\ 0 & \text{für } t > x \end{cases}$$

für alle $(x,t) \in [0,1] \times [0,\infty)$ gelten müsste. Das durch $f(x) = x$ für alle $x \in [0,1]$ gegebene $f \in C^1([0,1])$ erfüllt $f(0) = 0$, also $f \in D(A)$. Aber $S(t)f$ ist bei $x = t$ für alle $0 < t < 1$ nicht differenzierbar. Insbesondere ist $S(t)f \notin D(A)$ für alle $0 < t < 1$.

Aufgabe 8:

(a) (i) Sei A abgeschlossen in X. Zeige A_Y ist abgeschlossen in Y. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A_Y)$ mit $x_n \xrightarrow{n \to \infty} x$ und $A_Y x_n \xrightarrow{n \to \infty} y$. Zu zeigen ist $x \in D(A_Y)$ und $A_Y x = y$, also $x \in D(A)$, $x \in Y$, $Ax \in Y$ und $Ax = y$. Da A abgeschlossen in X ist, ist $x \in D(A)$ und $Ax = y$. Da Y abgeschlossen ist, und $x_n, Ax_n \in Y$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, ist auch $x = \lim_{n \to \infty} x_n \in Y$ bzw. $y = \lim_{n \to \infty} Ax_n \in Y$. $\square$

(ii) Sei A bijektiv, $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ und $A^{-1}Y \subseteq Y$. Zu zeigen ist A_Y ist bijektiv und $(A_Y)^{-1} = (A^{-1})_Y \in \mathcal{L}(Y)$.

Zeige: $(A^{-1})_Y \in \mathcal{L}(Y)$. Für den Definitionsbereich von $(A^{-1})_Y$ gilt

$$D((A^{-1})_Y) = \left\{ x \in \underbrace{D(A^{-1})}_{=\mathrm{Bild}(A)=X} \cap Y \mid \underbrace{A^{-1}x}_{\in Y} \in Y \right\} = Y$$

Da $A^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ gilt, ist A^{-1} abgeschlossen in X. Nach vorhergehendem Aufgabenteil ist also $(A^{-1})_Y$ abgeschlossen in Y. Weil $D((A^{-1})_Y) = Y$ gilt, ist $(A^{-1})_Y \in \mathcal{L}(Y)$ nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen.

Zeige: $A_Y : D(A_Y) \to Y$ ist bijektiv. Klar: $\mathrm{Bild}(A_Y) \subseteq Y$ nach Definition von $D(A_Y)$. Ebenfalls klar: A_Y ist als Einschränkung von A injektiv. Es bleibt Surjektivität zu zeigen. Sei dazu $y \in Y$ beliebig. Da A surjektiv ist, existiert ein $x \in D(A)$ mit $Ax = y$. Da $A^{-1}Y \subseteq Y$ gilt, ist $x \in Y$. Insgesamt also $x \in D(A_Y)$ und $A_Y x = y$.

Zeige: $(A^{-1})_Y = (A_Y)^{-1}$. Da beide Operatoren Einschränkungen von A^{-1} sind, gilt $(A^{-1})_Y x = (A_Y)^{-1}x$ für alle $x \in D((A_Y)^{-1}) \cap D((A^{-1})_Y)$. Bleibt zu zeigen $D((A^{-1})_Y) = D((A_Y)^{-1})$. Es gilt tatsächlich

$$D((A_Y)^{-1}) = \mathrm{Bild}(A_Y) = Y = D((A^{-1})_Y).$$

□

(b) Zeige: $B = A_Y$.

- „$\subseteq$”: Sei $x \in D(B) \subseteq Y$. Zeige: $x \in D(A_Y)$ und $A_Y x = Bx$. Es gilt

$$Bx = \lim_{t \to 0+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} = Ax.$$

  Folglich ist $x \in D(A)$. Da $\frac{S(t)x-x}{t} \in Y$ für jedes $t > 0$ gilt und Y abgeschlossen ist, ist auch $Ax \in Y$. Folglich ist $x \in D(A_Y)$ und $Bx = A_Y x$.

- „$\supseteq$”: Sei $x \in D(A_Y)$, also $x \in D(A) \cap Y$ und $Ax \in Y$. Zeige: $x \in D(B)$ und $Bx = A_y x$. Es gilt

$$Bx = \lim_{t \to 0+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0+} \frac{T(t)x - x}{t} = A_Y x = Ax.$$

  Also tatsächlich $x \in D(B)$ und $Bx = A_Y x$.

□