Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
11.05.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 04. Übungsblatt

Aufgabe 9:

(a) Zeige: A_0 ist abschließbar. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A_0)$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ und $A_0 f_n = af_n' \xrightarrow{n\to\infty} g$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zu zeigen ist $g = 0$.

Da $[0,1]$ kompakt ist und $a(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$, gilt sogar $\sup_{x\in[0,1]} a(x) = \min_{x\in[0,1]} a(x) =: \eta > 0$. Folglich ist $\frac{1}{a} \in C([0,1])$ und $\left\|\frac{1}{a}\right\|_\infty = \frac{1}{\eta}$. Folglich gilt $f_n' = \frac{af_n'}{a} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{g}{a}$. Nach Lemma 1 der Übung ist $0 = (0)' = \lim_{n\to\infty} f_n' = \frac{g}{a}$. Folglich ist bereits $g = 0$.

Behauptung: Der Abschluss A von A_0 hat $D(A) = C^1([0,1])$ und ist gegeben durch $Af = af'$ für alle $f \in D(A)$.

- „$\overline{A_0} \subseteq A$“: Sei $(x,y) \in \overline{A_0}$. Es existiert also eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A_0)$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ und $A_0 f_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeige $f \in D(A)$ und $Af = g$. Wie oben sieht man $f_n' = \frac{af_n'}{a} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{g}{a}$. Nach Lemma 1 der Übung ist $f \in C^1([0,1]) = D(A)$ und $f' = \lim_{n\to\infty} \frac{af_n'}{a} = \frac{g}{a}$. Folglich ist tatsächlich $Af = af' = g$.
- „$A \subseteq \overline{A_0}$“: Sei $f \in D(A)$. Zu zeigen ist, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in D(A_0)$ existiert mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ und $A_0 f_n \xrightarrow{n\to\infty} Af$ bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Da Polynomfunktionen dicht liegen in $C([0,1])$ bezüglich der Supremumsnorm (vgl. Satz 8 der Übung), existiert eine Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C^\infty([0,1])$ mit $p_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f'$ für $n \to \infty$. Definiere $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ durch $f_n(x) = f(0) + \int_0^x p_n(s)\mathrm{d}s$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$. Dann gilt $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$, $f_n \in C^\infty([0,1])$ und $f_n' = p_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber auch $A_0 f_n = af_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} af = Af$ für $n \to \infty$.

(b) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A+B)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ und $(A+B)f_n = af_n' + bf_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist $f \in D(A)$ und $(A+B)f = g$. Da $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ und $\|b\|_\infty < \infty$ gilt, folgt auch $bf_n \xrightarrow{\|\cdot\|}_\infty bf$ für $n \to \infty$. Deshalb $Af_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g - bf$. Da A abgeschlossen ist, folgt $f \in D(A)$ und $Af = g - bf$. Insbesondere $(A+B)f = g$.

Aufgabe 10:

(a) Zeige: A_1 ist dissipativ. Sei dazu $f \in D(A_1) = \left\{f \in C_0(\mathbb{R}^d) \,|\, mf \in C_0(\mathbb{R}^d)\right\}$. Zu zeigen ist, dass ein $\varphi_f \in J(f)$ mit $\operatorname{Re}\langle A_1 f|\varphi_f\rangle \leq 0$ existiert. Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$ derart, dass $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$. Definiere $\varphi_f := \overline{f(x_0)}\delta_{x_0}$. Klar: φ_f ist linear. Wegen $|\varphi_f(g)| = |f(x_0)g(x_0)| \leq \|g\|_\infty |f(x_0)| = \|g\|_\infty \|f\|_\infty$ für alle $g \in X_1$, ist $\varphi_f \in X_1'$ und $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty$.

Wegen $\varphi_f(f) = \overline{f(x_0)} f(x_0) = |f(x_0)|^2 = \|f\|_\infty^2$, ist $\|\varphi_f\| = \|f\|_\infty$ und $\varphi_f \in J(f)$ (vgl. Beispiel 1.28 (a) der Vorlesung). Nun gilt in der Tat

$$\mathrm{Re}(\langle A_1 f | \varphi_f \rangle) = \mathrm{Re}\, \overline{f(x_0)} m(x_0) f(x_0) = \underbrace{|f(x_0)|^2}_{\geq 0} \underbrace{\mathrm{Re}\, m(x_0)}_{\leq 0} \leq 0.$$

Zeige: A_1 ist abgeschlossen. Sei dazu $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $D(A_1)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$ und $A_1 f_n = m f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} g$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist, dass $f \in D(A_1)$ und $A_1 f = g$. Klar: $f, g \in C(\mathbb{R}^d)$. Zeige $f, g \in C_0(\mathbb{R}^d)$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|f - f_n\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Da $f_n \in D(A_1)$ gilt, existiert ein $R > 0$ mit $|f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\|x\| \geq R$. Folglich $|f(x)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \leq \|f - f_n\|_\infty + |f_n(x)| < \varepsilon$ für alle $\|x\| \geq R$. Genauso sieht man $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ ein. Da gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz impliziert, gilt

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} m(x) f_n(x) = m(x) \lim_{n\to\infty} f_n = m(x) f(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Folglich $g = mf = A_1 f$.

Zeige: A_1 erzeugt Kontraktionshalbgruppe. Versuche dafür den Satz 1.27 (b) der Vorlesung (Lumar-Phillips) anzuwenden. Überprüfe dafür seine Voraussetzungen.

Zeige: $D(A_1)$ ist dicht in X_1. Sei dazu $f \in X_1$ und $\varepsilon > 0$. Zu zeigen ist, dass ein $g \in D(A_1)$ existiert mit $\|f - g\|_\infty < \varepsilon$. Da $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$, existiert ein $R > 0$ mit $|f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $\|x\| \geq R$. Definiere $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ durch

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{für } \|x\| < R, \\ f\left(\frac{x}{\|x\|} R\right)\left(1 - \frac{\|x\|}{R+1}\right) & \text{für } R \leq \|x\| < R+1, \\ 0 & \text{für } \|x\| \geq R+1 \end{cases} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Klar: $g \in C_0(\mathbb{R}^d)$ und es gilt

$$\begin{aligned} |f(x) - g(x)| &= \begin{cases} 0 & \text{für } \|x\| < R, \\ \left|f(x) - f\left(\frac{x}{\|x\|} R\right)\left(1 - \frac{\|x\|}{R+1}\right)\right| & \text{für } R \leq \|x\| < R+1, \\ |f(x)| & \text{für } \|x\| \geq R+1 \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} 0 & \text{für } \|x\| < R, \\ |f(x)| + \left|f\left(\frac{x}{\|x\|} R\right)\right| & \text{für } R \leq \|x\| < R+1, \\ |f(x)| & \text{für } \|x\| \geq R+1 \end{cases} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Folglich ist $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Zeige: $(\lambda_0 I - A_1) : D(A_1) \to X_1$ ist surjektiv für ein $\lambda_0 > 0$. Sei dazu $g \in X_1$ und $\lambda_0 > 0$. Wegen $\mathrm{Re}\, m \leq 0$ beobachten wir, dass $|\lambda_0 - m| \geq \mathrm{Re}(\lambda_0 - m) = \lambda_0 - \mathrm{Re}\, m \geq \lambda_0 > 0$ gilt. Die Gleichung

$$(\lambda_0 I - A_1) f = (\lambda_0 - m) f = g$$

hat deswegen genau eine Lösung $f = \frac{g}{\lambda_0 - m}$. Klar ist $g \in C(\mathbb{R}^d)$. Wegen $0 \leq |f(x)| = \left|\frac{g}{\lambda_0 - m}\right| \leq \frac{|g(x)|}{\lambda_0} \xrightarrow{\|x\|\to\infty} 0$, ist sogar $f \in D(A_1)$. Folglich ist $(\lambda_0 I - A_1)$ surjektiv sogar für jedes $\lambda_0 > 0$.

(b) Nach Beispiel 1.28 (a) der Vorlesung, ist A_2 dissipativ. Im Allgemeinen ist A_2 nicht abgeschlossen. Betrachte etwa $c = b = 0$. Wäre A_2 abgeschlossen, dann wäre $D(A_2)$ abgeschlossen bezüglich der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$. Da Erzeuger von C_0-Halbgruppen nach Lemma 1.12 (c) der Vorlesung abgeschlossen sind, erzeugt A_2 im Allgemeinen keine Kontraktionshalbgruppe.

(c) Zeige: A_3 ist dissipativ. Sei dazu $f \in D(A_3) = \{f \in C^1([0,1]) \,|\, f(1) = 0\}$. Zu zeigen ist, dass ein $\varphi_f \in J(f) = \{(\cdot\,|f)\}$ mit $\operatorname{Re}\langle A_3 f|\varphi_f\rangle \leq 0$ existiert. Tatsächlich gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}\langle A_3 f|\varphi_f\rangle &= \operatorname{Re}\int_0^1 f'(x)\overline{f(x)}\mathrm{d}x \overset{\text{Part. Int.}}{=} \operatorname{Re}\left(\left[f(x)\overline{f(x)}\right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 f(x)\overline{f'(x)}\mathrm{d}x\right) \\
&= -|f(0)|^2 - \operatorname{Re}\langle A_3 f|\varphi_f\rangle \Rightarrow \operatorname{Re}\langle A_3 f|\varphi_f\rangle = \frac{|f(0)|^2}{2} \leq 0.
\end{aligned}$$

Zeige: A_3 ist nicht abgeschlossen. Betrachte dazu etwa die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $D(A_3)$ definiert durch $f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}} - \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}}$ für jedes $x \in [0,1]$ und jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &\leq \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{n}} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}} \leq \sqrt{\frac{1}{4} + 2} + \sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 2} \leq 3, \\
|f_n'(x)| &= \left|\frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right)}{2\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}}}\right| \leq \begin{cases} \frac{|x - \frac{1}{2}|}{\sqrt{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}} & \text{für } x \neq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für } x = \frac{1}{2} \end{cases} \leq 1
\end{aligned}$$

für alle $x \in [0,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f_n(x) &= \frac{1}{2} - \left|x - \frac{1}{2}\right| =: f(x), \\
\lim_{n\to\infty} f_n'(x) &= -\operatorname{sgn}\left(x - \frac{1}{2}\right) =: g(x)
\end{aligned}$$

für alle $x \in [0,1]$. Nach dem Satz über die majorisierte Konvergenz gilt also tatsächlich

$$\begin{aligned}
\|f - f_n\|_2^2 &= \int_0^1 |f(x) - f_n(x)|\,\mathrm{d}x \to 0, \\
\|g - f_n'\|_2^2 = \|g - A_3 f_n\| &= \int_0^1 |g(x) - f_n'(x)|\,\mathrm{d}x \to 0
\end{aligned}$$

für $n \to \infty$. Aber $g \notin C^1([0,1]) \supseteq D(A_3)$.

Da Erzeuger von C_0-Halbgruppen nach Lemma 1.12 (c) der Vorlesung abgeschlossen sind, erzeugt A_3 keine Kontraktionshalbgruppe.

(d) Zeige: A_4 ist dissipativ. Sei dazu $f \in D(A_4) = \{f \in C^2(\mathbb{R}^d) \,|\, f \in C_0(\mathbb{R}^d) \wedge \Delta f \in C_0(\mathbb{R}^d)\}$. Zu zeigen ist, dass ein $\varphi_f \in J(f)$ mit $\operatorname{Re}\langle A_3 f|\varphi_f\rangle \leq 0$ existiert.

Es existiert ein $x_0 \in \mathbb{R}^d$ derart, dass $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$. Definiere $\varphi_f := \overline{f(x_0)}\delta_{x_0}$. Klar: φ_f ist linear. Wegen $|\varphi_f(g)| = |f(x_0)g(x_0)| \leq \|g\|_\infty |f(x_0)| = \|g\|_\infty \|f\|_\infty$ für alle $g \in X_4$, ist $\varphi_f \in X_4'$ und $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty$. Wegen $\varphi_f(f) = \overline{f(x_0)}f(x_0) = |f(x_0)|^2 = \|f\|_\infty^2$, ist $\|\varphi_f\| = \|f\|_\infty$ und $\varphi_f \in J(f)$ (vgl. Beispiel 1.28 (a) der Vorlesung). Die Abbildung $r \in C^2(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ definiert durch $r(x) = \operatorname{Re} \overline{f(x_0)} f(x)$ hat bei x_0 ein globales Maximum. Dann ist die Hesse-Matrix $H_r(x_0)$ von r bei x_0 negativ semidefinit. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Re} \langle A_4 f | \varphi_f \rangle &= \operatorname{Re} \overline{f(x_0)} \Delta f(x_0) = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_0) \\
&= \sum_{j=1}^{d} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \operatorname{Re} f \overline{f(x_0)} \right)(x_0) = \Delta r(x_0) \\
&= \operatorname{Spur}(H_r(x_0)) \leq 0.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11:

Versuche den Satz 1.27 (b) der Vorlesung (Lumar-Phillips) anzuwenden. Überprüfe dafür seine Voraussetzungen.

Zeige: $D(A)$ ist dicht in X. Überprüfe dafür die Voraussetzungen des Satzes von Stone-Weierstraß (Satz 8 der Übung) für $\mathcal{A} = D(A)$. Wegen $f \cdot g \in C^1([0,1])$ mit $(f \cdot g)' = f'g + fg'$ für jedes $f, g \in C^1([0,1])$, ist $D(A)$ abgeschlossen unter punktweiser Multiplikation. Da die Abbildung $p \in D(A)$ definiert durch $p(x) = 2x^3 - 3x^2$ für jedes $x \in [0,1]$ streng monoton fallend ist, ist $D(A)$ punktetrennend. Restlichen Voraussetzungen sind klar.

Zeige: A ist dissipativ. Sei dazu $f \in D(A) = \left\{ f \in C^2([0,1]) | f'(0) = f'(1) = 0 \right\}$. Zu zeigen ist, dass ein $\varphi_f \in J(f)$ mit $\operatorname{Re} \langle Af | \varphi_f \rangle \leq 0$ existiert. Es existiert ein $x_0 \in [0,1]$ derart, dass $\|f\|_\infty = |f(x_0)|$. Definiere $\varphi_f := \overline{f(x_0)} \delta_{x_0}$. Klar: φ_f ist linear. Wegen $|\varphi_f(g)| = |f(x_0) g(x_0)| \leq \|g\|_\infty |f(x_0)| = \|g\|_\infty \|f\|_\infty$ für alle $g \in X$, ist $\varphi_f \in X'$ und $\|\varphi_f\| \leq \|f\|_\infty$. Wegen $\varphi_f(f) = \overline{f(x_0)} f(x_0) = |f(x_0)|^2 = \|f\|_\infty^2$, ist $\|\varphi_f\| = \|f\|_\infty$ und $\varphi_f \in J(f)$ (vgl. Beispiel 1.28 (a) der Vorlesung). Die Abbildung $r \in C^2([0,1], \mathbb{R})$ definiert durch $r(x) := \operatorname{Re} \overline{f(x_0)} f(x)$ hat bei x_0 ein globales Maximum und erfüllt

$$
r'(x) = \operatorname{Re} \overline{f(x_0)} f'(x), \qquad r''(x) = \operatorname{Re} \overline{f(x_0)} f''(x)
$$

für alle $x \in [0,1]$. Ist $x_0 \in (0,1)$, so gilt $r'(x_0) = 0$ und $r''(x_0) = \operatorname{Re} \overline{f(x)} f''(x) = \operatorname{Re} \langle Af | \varphi_f \rangle \leq 0$. Ist $x_0 \in \{0,1\}$, so setze f zweimal stetig differenzierbar nach rechts und links fort (etwa durch Polynome). Wegen $f'(0) = f'(1)$ ist wieder $r'(x_0) = 0$ und $r''(x_0) \leq 0$, denn sonst wäre x_0 Stelle eines lokalen Minimums von r. Also $\operatorname{Re} \langle Af | \varphi_f \rangle \leq 0$.

Zeige: $\lambda I - A$ ist surjektiv für ein $\lambda > 0$. Sei dazu $g \in X = C([0,1])$ und $\lambda > 0$ beliebig. Gesucht ist ein $f \in D(A)$ mit

$$
f''(x) = \lambda f(x) - g(x) \qquad \forall x \in [0,1]. \tag{1}
$$

Die obige Gleichung ist eine gewöhnliche inhomogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Nach Analysis III existiert eine partikuläre Lösung $f_p \in C^2([0,1])$ von (1) und die allgemeine Lösung von (1) ist durch

$$
f(x) = C_1 \cosh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + C_2 \sinh\left(\sqrt{\lambda} x\right) + f_p(x) \qquad \forall x \in [0,1]
$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ gegeben. Die Wahl

$$
\begin{aligned}
C_2 &= -\frac{f_p'(0)}{\sqrt{\lambda}}, \\
C_1 &= \frac{f_p'(0) \cosh\left(\sqrt{\lambda}\right) - f_p'(1)}{\sqrt{\lambda} \sinh\left(\sqrt{\lambda}\right)}
\end{aligned}
$$

liefert $f'(0) = f'(1) = 0$, also $f \in D(A)$. Tatsächlich ist also $\lambda I - A : D(A) \to X$ surjektiv für alle $\lambda > 0$. $\square$