Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
18.05.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 05. Übungsblatt

Satz 10. Divergenzsatz von Gauß
Sei $d \in \mathbb{N}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt, $\partial\Omega \in C^1$ und $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$. Dann gilt

$$\int_\Omega (\nabla \cdot f)(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{n=1}^d \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \sum_{n=1}^d f_n(x)\nu_n(x) \mathrm{d}\sigma(x) \int_{\partial\Omega} (f \cdot \nu)(x) \mathrm{d}\sigma(x),$$

wobei $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^d$ die äußere Einheitsnormale bezeichnet.

Beweis. Siehe Literatur. □

Korollar 11. erste Greensche Formel
Seien d und Ω wie im Satz 10, $g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, $h \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$. Dann gilt

$$\int_\Omega (g\Delta h)(x) + [(\nabla g) \cdot (\nabla h)](x) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial h}{\partial \nu}(x) \mathrm{d}\sigma(x).$$

Beweis. Betrachte $f := g\nabla h \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^d)$. Es gilt

$$(\nabla \cdot f)(x) = \sum_{n=1}^d \left(\frac{\partial}{\partial x_n} g \frac{\partial h}{\partial x_n} \right)(x) = \sum_{n=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_n}(x) \frac{\partial h}{\partial x_n}(x) + g \frac{\partial^2 h}{\partial x_n^2}(x) = (\nabla g)(\nabla h)(x) + (g\Delta h)(x)$$

für alle $x \in \overline{\Omega}$. Mit Satz 10 folgt

$$\int_\Omega (\nabla g)(\nabla h)(x) + (g\Delta h)(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega (\nabla f)(x) \mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} (f \cdot \nu)(x) \mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} g(x) \frac{\partial h}{\partial \nu}(x) \mathrm{d}\sigma(x).$$

□

Aufgabe 12:

Sei $f \in D(A)$. Nach Abschnitt 1.23 der Vorlesung gilt $J(f) = \{f^*\}$ mit $f^*(x) = \mathbb{1}_{\{f \neq 0\}}(x) \frac{\overline{f}(x)|f(x)|^{p-2}}{\|f\|_p^{p-2}}$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Zu zeigen ist, dass $\operatorname{Re} \langle Af | f* \rangle \leq 0$ gilt. Da $f \in D(A) = C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, existiert ein

$R > 0$ mit $f|_{B(R,0)^c} \equiv 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^{p-2} \operatorname{Re}\left[\langle Af|f^*\rangle\right] &= \|f\|_p^{p-2} \operatorname{Re}\left[\int_{B(R,0)^c} (\Delta f)(x) f^*(x) \mathrm{d}x\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\int_{B(R,0)^c} (\Delta f)(x) \left(\overline{f(x)}\, |f(x)|^{p-2}\right) \mathrm{d}x\right] \\
&= \operatorname{Re}\left[\int_{B(R,0)^c} (\Delta f)(x) \left(\overline{f(x)}\, |f(x)|^{p-2}\right) \mathrm{d}x\right] \\
&\overset{\text{Kor. 11}}{=} -\operatorname{Re}\left[\int_{B(R,0)^c} (\nabla f) \cdot \left(\nabla \left(\overline{f}(|f|^2)^{\frac{p}{2}-1}\right)\right)(x) \mathrm{d}x\right] \\
&= -\operatorname{Re}\left[\int_{B(R,0)^c} (\nabla f(x)) \cdot \left(\overline{\nabla f(x)}\right) |f(x)|^{p-2}\, \mathrm{d}x\right] - \\
&\quad \operatorname{Re}\left[\int_{B(R,0)^c} (\nabla f(x)) \cdot \overline{f(x)} \left(\frac{p}{2} - 1\right) (|f(x)|^2)^{\frac{p}{2}-2} 2 \operatorname{Re}\left[\left(\overline{f}(x) \nabla f(x)\right)\right] \mathrm{d}x\right] \\
&= -\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f(x)\|_2^2\, |f(x)|^{p-2}\, \mathrm{d}x + (2-p) \int_{\mathbb{R}^d} \left\|\operatorname{Re} \overline{f(x)} \nabla f(x)\right\|_2^2 |f(x)|^{p-4}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

- $p \geq 2$: Offensichtlich $\operatorname{Re}\langle Af|f^*\rangle \leq 0$.
- $p \in [1,2)$: Es gilt

$$|f(x)|^{p-2}\, \|\nabla f(x)\|_2^2 = |f(x)|^{p-4} \left\|\overline{f(x)} \nabla f(x)\right\|_2^2 \geq |f(x)|^{p-4} \left\|\operatorname{Re} \overline{f(x)} \nabla f(x)\right\|_2^2$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$. Folglich

$$\begin{aligned}
\|f\|_p^{p-2} \operatorname{Re}\langle Af|f^*\rangle &= -\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla f(x)\|_2^2\, |f(x)|^{p-2}\, \mathrm{d}x + (2-p) \int_{\mathbb{R}^d} \left\|\operatorname{Re} \overline{f(x)} \nabla f(x)\right\|_2^2 |f(x)|^{p-4}\, \mathrm{d}x \\
&\leq (1-p) \int_{\mathbb{R}^d} \left\|\operatorname{Re} \overline{f(x)} \nabla f(x)\right\|_2^2 |f(x)|^{p-4}\, \mathrm{d}x \leq 0.
\end{aligned}$$

□

Lemma 12. *Seien X, Y Mengen, $D(A), D(B) \subseteq X$ und $A : D(A) \to Y$, $B : D(B) \to Y$ Abbildungen derart, dass $A \subseteq B$, A surjektiv und B injektiv ist. Dann ist $A = B$.*

Beweis. Zu zeigen ist nur noch $B \subseteq A$. Sei dazu $x \in D(B)$. Zeige $x \in D(A)$ und $Ax = Bx$. Da A surjektiv ist, existiert ein $x' \in D(A)$ mit $Ax' = Bx$. Da $D(A) \subseteq D(B)$ gilt, ist $x' \in D(B)$. Da B injektiv ist, muss $x = x'$ gelten. Folglich ist $x \in D(A)$ und $Ax = Bx$. □

Korollar 13. *Sei X ein Banachraum, $D(A), D(B) \subseteq X$ lineare Teilräume und $A : D(A) \to X$, $B : D(B) \to X$ lineare Abbildungen mit $A \subseteq B$ und $\rho(A) \cap \rho(B) \neq \emptyset$. Dann ist $A = B$.*

Beweis. Sei $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Dann ist $(\lambda I_{D(A)} - A)$ surjektiv und $(\lambda I_{D(B)} - B)$ injektiv, da beide bijektiv sind. Da $A \subseteq B$ gilt, ist $(\lambda I_{D(A)} - A) \subseteq (\lambda I_{D(B)} - B)$. Nach Lemma 12 ist also $(\lambda I_{D(A)} - A) = (\lambda I_{D(B)} - B)$, woraus $A = B$ folgt. □

Aufgabe 13:

(a) Klar: Y ist linearer Teilraum von X'. Zeige Y ist abgeschlossen. Sei dazu $(y_n')_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in Y mit $y_n' \xrightarrow{\|\cdot\|_{X'}} y' \in X'$ für $n \to \infty$. Zeige: $y' \in Y$. Nach Abschnitt 1.30 und Lemma 1.7 der Vorlesung gilt

$$M := \sup_{t\in[0,1]} \left\|T(t)'\right\| = \sup_{t\in[0,1]} \|T(t)\| < \infty.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgelegt. Wegen $\|y_n' - y'\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ derart, dass

$$\left\|y_n' - y'\right\| < \frac{\varepsilon}{2(M+1)}$$

ausfällt. Da $y_n' \in Y$, existiert ein $R > 0$ derart, dass

$$\left\|T(t)'y_n' - y_n'\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $0 \le t < R$ ausfällt. Folglich gilt für alle $0 \le t < R$

$$\begin{aligned}
\left\|T(t)'y' - y'\right\| &\le \left\|T(t)'y' - T(t)'y_n'\right\| + \left\|T(t)'y_n' - y_n'\right\| + \left\|y_n' - y'\right\| \\
&\le \left\|T(t)'\right\| \left\|y' - y_n'\right\| + \left\|y_n' - y'\right\| + \left\|T(t)'y_n' - y_n'\right\| \\
&\le (M+1) \left\|y' - y_n'\right\| + \left\|T(t)'y_n' - y_n'\right\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gilt $\|T(t)'y' - y'\| \xrightarrow{t\to 0+} 0$ und $y' \in Y$.

(b) Für alle $x \in X$, $y' \in Y$, $t, s \ge 0$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle x|S(0)y'\right\rangle &= \left\langle x|T(0)'y'\right\rangle = \left\langle T(0)x|y'\right\rangle = \left\langle x|y'\right\rangle \\
\left\langle x|S(t+s)y'\right\rangle &= \left\langle x|T(t+s)'y'\right\rangle = \left\langle T(t+s)x|y'\right\rangle = \left\langle T(t)T(s)x|y'\right\rangle \\
&= \left\langle x|T(s)'T(t)'y'\right\rangle = \left\langle x|S(s)S(t)y'\right\rangle.
\end{aligned}$$

Folglich ist $S(0) = I_Y$ und $S(t+s) = S(t)S(s)$ für alle $t, s \ge 0$. Also ist $S(t)_{t\ge 0}$ eine Halbgruppe. Wegen der Wahl von Y ist diese stark stetig in $t = 0$.

(c) Zeige: $B = A_Y'$. Sei zunächst $y' \in D(B)$. Für alle $x \in D(A)$ gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle x|By'\right\rangle &= \left\langle x|\lim_{t\to 0+} \frac{S(t)y' - y'}{t}\right\rangle = \lim_{t\to 0+} \left\langle \frac{T(t)x - x}{t}|y'\right\rangle = \left\langle \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}|y'\right\rangle \\
&= \left\langle Ax|y'\right\rangle.
\end{aligned}$$

Folglich ist $y' \in D(A')$ und $A'y' = By'$. Ferner ist $y' \in D(B) \subseteq Y$ und $A'y' = By' \in Y$, da $B : D(B) \to Y$. Folglich ist $y' \in D(A_Y')$ und $By' = A_Y'y'$.

Nach Korollar 13 reicht es $\rho(B) \cap \rho(A_Y') \ne \emptyset$ zu zeigen. Da A bzw. B Erzeuger einer C_0-Halbgruppe sind, liefert Satz 1.16 der Vorlesung (Hille-Yosida), dass $(\omega_1, \infty) \subseteq \rho(B)$ für ein $\omega_1 \in \mathbb{R}$ und $(\omega_2, \infty) \subseteq \rho(A)$ für ein ω_2 gilt. Sei nun $\lambda > \max\{\omega_1, \omega_2\}$.Nach Abschnitt 1.30 (7) der Vorlesung ist $\rho(A') = \rho(A)$ und $R(\lambda, A') = R(\lambda, A)'$. Zeige $R(\lambda, A')Y \subseteq Y$. Sei dazu $y' \in Y$. Es gilt

$$\begin{aligned}
T(t)'R(\lambda, A')y' &= T(t)'R(\lambda, A)'y' = (R(\lambda, A)T(t))'y' = (T(t)R(\lambda, A))'y' \\
&= R(\lambda, A')T(t)'y' \xrightarrow{t\to 0+} R(\lambda, A')y',
\end{aligned}$$

also $R(\lambda, A')y' \in Y$. Nach Aufgabe 8 (a) (ii), ist dann aber $\lambda \in \rho(A_Y')$ (und man weiß $R(\lambda, A_Y') = R(\lambda, A')_Y$). Also ist $\lambda \in \rho(B) \cap \rho(A_Y')$.

□