Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
08.06.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 08. Übungsblatt

Aufgabe 19:
Zeige Eindeutigkeit der integrierten Lösung: Seien dazu u_1, u_2 integrierte Lösungen des Cauchy-Problems. Betrachte $w := u_1 - u_2$. Zu zeigen: $w \equiv 0$. Nach Voraussetzung ist dann $w \in C(\mathbb{R}_0^+, X)$, $\int_0^t w(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ und

$$w(t) = A\int_0^t w(s)\mathrm{d}s$$

für alle $t \geq 0$. Definiere $I(t) := \int_0^t w(s)\mathrm{d}s \in D(A)$ für alle $t \geq 0$. Es ist $I(0) = 0$. Nach dem Hauptsatz ist ferner $I \in C^1(\mathbb{R}_0^+, X)$ und

$$I'(t) = w(t) = A\int_0^t w(s)\mathrm{d}s = AI(t)$$

für jedes $t \geq 0$. Nach Satz 1.11 der Vorlesung ist $I \equiv 0$ und folglich $w(t) = I'(t) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Zeige, dass die milde Lösung v eine integrierte Lösung ist. Klar: $v \in C(\mathbb{R}_0^+, X)$. Nach Lemma 1.12 (b) der Vorlesung ist $\int_0^t T(s)u_0\mathrm{d}s \in D(A)$ und $A\int_0^t T(s)u_0\mathrm{d}s = T(t)u_0 - u_0$ für $t \geq 0$. Es bleibt also $\int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s \in D(A)$ und

$$\int_0^t T(t-s)f(s)\mathrm{d}s = A\int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$$

für alle $t \geq 0$ zu zeigen. Sei dazu $t \geq 0$, $h > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\left[T(h)\int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]\\
=\;& \frac{1}{h}\left[\int_0^t\int_0^s T(s+h-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]\\
=\;& \frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h}\int_0^{s-h} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]\\
=\;& \frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h}\int_0^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_h^{t+h}\int_{s-h}^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]\\
=\;& \frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h}\int_0^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^h\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_h^{t+h}\int_{s-h}^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]\\
=\;& \underbrace{\frac{1}{h}\left[\int_t^{t+h}\int_0^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]}_{=:I_1} - \underbrace{\frac{1}{h}\left[\int_0^h\int_0^s T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]}_{=:I_2} - \underbrace{\frac{1}{h}\left[\int_h^{t+h}\int_{s-h}^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s\right]}_{=:I_3}
\end{aligned}$$

Nach dem Hauptsatz gilt

$$\begin{aligned} I_1 &\xrightarrow{h\to 0+} \int_0^t T(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau, \\ I_2 &\xrightarrow{h\to 0+} \int_0^0 T(t-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \end{aligned}$$

Da $f \in C(\mathbb{R}_0^+, X)$, ist $(\tau, s) \mapsto T(\tau)f(s)$ gleichmäßig stetig auf dem Kompaktum $[0,t] \times [0,2t]$ nach Aufgabe 4 (b). Zu $\varepsilon > 0$ gibt es also ein $\delta > 0$ mit $\|T(\tau_1)f(s_1) - T(\tau_2)(s_2)\| < \varepsilon$ für alle $(\tau_1, s_1), (\tau_2, s_2) \in [0,t] \times [0,2t]$ mit $|\tau_1 - \tau_2|, |s_1 - s_2| < \delta$. Folglich ist

$$\begin{aligned} \left\| I_3 - \int_0^t f(s)\mathrm{d}s \right\| &= \left\| \frac{1}{h}\int_h^{t+h}\int_{s-h}^{s} T(s-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t f(s)\mathrm{d}s \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{s}^{s+h} T(s+h-\tau)f(\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t f(s)\mathrm{d}s \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{h}\int_0^{t}\int_{0}^{h} T(h)f(s+h-\tau)\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s - \int_0^t T(0)f(s)\mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \int_0^t \frac{1}{h}\int_0^h \underbrace{\|T(\tau)f(s+h-\tau) - T(0)f(s)\|\,\mathrm{d}\tau}_{<\varepsilon}\,\mathrm{d}s \\ &\leq \varepsilon t \end{aligned}$$

für $0 < h < \delta$. Also $I_3 \xrightarrow{h\to 0+} \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$. □

Satz 14. *Sei $0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{C}$ stetig und $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist*

$$y(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x) + \frac{1}{\mu}\int_0^x f(\tau)\sinh(\mu(x-\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (x \in I)$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ die allgemeine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = f(x) \qquad (x \in I).$$

Beweis. Vergleiche etwa Aufgabe 31 in HM3phys im WS 2014/15. □

Aufgabe 20:

(a) Wir wollen den Satz 2.12 (b) mit $\omega = \frac{\pi}{2}$ anwenden. Nach Aufgabe 11 ist A ein abgeschlossener, dicht definierter linearer Operator. Bleibt $\Sigma_\pi \subseteq \rho(A)$ und

$$\sup\{\|\lambda R(\lambda, A)\| \mid \lambda \in \Sigma_\theta\} < \infty$$

für alle $0 < \theta < \pi$ zu zeigen. Sei dazu $0 < \theta < \pi$ und $\lambda \in \Sigma_\theta$, also etwa $\lambda = \mu^2$ für ein $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(\mu) > 0$. Sei ferner $f \in C([0,1])$. Die Gleichung

$$\begin{aligned} \lambda u - u'' &= f \\ \Leftrightarrow u'' - \mu^2 u &= -f \end{aligned}$$

hat nach Satz 14 der Übung also genau die Lösungen $u \in C^2([0,1])$

$$u(x) = C_1 \cosh(\mu x) + C_2 \sinh(\mu x) - \frac{1}{\mu}\int_0^x f(\tau)\sinh(\mu(x-\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (x \in [0,1])$$

mit freien Konstanten $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$. Es ist

$$u'(x) = \mu C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \mu \cosh(\mu x) - \int_0^x f(\tau)\cosh(\mu(x-\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (x \in [0,1]).$$

Die Bedingung $u'(0) = \mu C_2 = 0$ ist zu $C_2 = 0$ äquivalent. Die Bedingung

$$u'(1) = \mu C_1 \sinh(\mu) - \int_0^1 f(\tau)\cosh(\mu(1-\tau))\mathrm{d}\tau = 0$$

ist zu

$$C_1 = \frac{1}{\mu\sinh(\mu)} \int_0^1 f(\tau)\cosh(\mu(1-\tau))\mathrm{d}\tau =: 2a(\mu, f)$$

äquivalent. Man beachte, dass wegen

$$\sinh(\mu) = \mathrm{i}\sin\left(\frac{\mu}{\mathrm{i}}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\mu}{\mathrm{i}} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \mu \in \mathrm{i}\pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow \lambda \in \left\{-k^2\pi^2 \middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$$

der obige Ausdruck wohldefiniert ist. Folglich ist $\Sigma_\pi \subseteq \rho(A)$ und

$$(R(\lambda, A)f)(x) = 2a(\mu, f)\cosh(\mu x) - \frac{1}{\mu}\int_0^x f(\tau)\sinh(\mu(x-\tau))\mathrm{d}\tau \qquad (x \in [0,1])$$

für alle $\lambda \in \Sigma_\pi$ und alle $f \in X$ gilt.

Als nächstes ist die Abschätzung für $\|\lambda R(\lambda, A)\|$ zu zeigen. Dazu sortieren wir zunächst $e^{\mu\,\cdot}$-Terme nach Vorzeichen von $\mathrm{Re}(\mu)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
(R(\lambda, A)f)(x) &= 2a(\mu, f)\cosh(\mu x) - \frac{1}{\mu}\int_0^x f(\tau)\sinh(\mu(x-\tau))\mathrm{d}\tau \\
&= a(\mu, f)e^{\mu x} + a(\mu, f)e^{-\mu x} - \frac{1}{2\mu}\int_0^x f(\tau)e^{\mu(x-\tau)}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\mu}\int_0^x f(\tau)e^{-\mu(x-\tau)}\mathrm{d}\tau \\
&= a(\mu, f)e^{\mu x} + a(\mu, f)e^{-\mu x} - \frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{\mu(x-\tau)}\mathrm{d}\tau \\
&\quad + \frac{1}{2\mu}\int_x^1 f(\tau)e^{\mu(x-\tau)}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\mu}\int_0^x f(\tau)e^{-\mu(x-\tau)}\mathrm{d}\tau \\
&= a(\mu, f)e^{\mu x} + a(\mu, f)e^{-\mu x} - \frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{\mu(x-\tau)}\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{-\mu|x-\tau|}\mathrm{d}\tau \\
&= \underbrace{\left(a(\mu, f) - \frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{-\mu\tau}\mathrm{d}\tau\right)e^{\mu x}}_{=:I_1} + \underbrace{a(\mu, f)e^{-\mu x}}_{=:I_2} + \underbrace{\frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{-\mu|x-\tau|}\mathrm{d}\tau}_{=:I_3}.
\end{aligned}$$

Nun können die einzelnen Terme abgeschätzt werden. Es gilt

$$
\begin{aligned}
|I_1| &= \left|\left(a(\mu,f) - \frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{-\mu\tau}\mathrm{d}\tau\right)e^{\mu x}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\mu\sinh(\mu)}\int_0^1 f(\tau)\cosh(\mu(1-\tau))\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{-\mu\tau}\mathrm{d}\tau\right| e^{\mathrm{Re}(\mu)x} \\
&\leq \frac{1}{|2\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 |f(\tau)|\left|\cosh(\mu(1-\tau)) - \sinh(\mu)e^{-\mu\tau}\right|\mathrm{d}\tau e^{\mathrm{Re}(\mu)} \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{|4\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 \left|e^{\mu(1-\tau)} + e^{-\mu(1-\tau)} - e^{-\mu\tau}(e^{\mu} - e^{-\mu})\right|\mathrm{d}\tau e^{\mathrm{Re}(\mu)} \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{|4\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 \left|e^{-\mu(1-\tau)} + e^{-\mu(1+\tau)}\right|\mathrm{d}\tau e^{\mathrm{Re}(\mu)} \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{|4\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 e^{-\mathrm{Re}(\mu)(1-\tau)} + e^{-\mathrm{Re}(\mu)(1+\tau)}\mathrm{d}\tau e^{\mathrm{Re}(\mu)} \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{|2\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 \cosh\left(\mathrm{Re}(\mu)\tau\right)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\|f\|_\infty\sinh(\mathrm{Re}(\mu))}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu\sinh(\mu)|} \leq \frac{\|f\|_\infty\sinh(\mathrm{Re}(\mu))}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|\sinh(\mathrm{Re}(\mu)} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|}, \\
|I_2| &= \left|a(\mu,f)e^{-\mu x}\right| = \left|\frac{1}{2\mu\sinh(\mu)}\int_0^1 f(\tau)\cosh(\mu(1-\tau))\mathrm{d}\tau e^{-\mu x}\right| \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{2\,|\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 |\cosh(\mu(1-\tau)|\,\mathrm{d}\tau e^{-\mathrm{Re}(\mu)x} \\
&\leq \frac{\|f\|_\infty}{2\,|\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 |\cosh(\mu\tau)|\,\mathrm{d}\tau \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\,|\mu\sinh(\mu)|}\int_0^1 \cosh(\mathrm{Re}(\mu)\tau)\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\|f\|_\infty\sinh(\mathrm{Re}(\mu))}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu\sinh(\mu)|} \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|}, \\
|I_3| &= \left|\frac{1}{2\mu}\int_0^1 f(\tau)e^{-\mu|x-\tau|}\mathrm{d}\tau\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{2\,|\mu|}\int_0^1 e^{-\mathrm{Re}(\mu)|x-\tau|}\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|}\left(\left[e^{\mathrm{Re}(\mu)(\tau-x)}\right]_{\tau=0}^{x} - \left[e^{\mathrm{Re}(\mu)(x-\tau)}\right]_{\tau=x}^{1}\right) \\
&= \frac{\|f\|_\infty}{2\,\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|}\left(1 - e^{-\mathrm{Re}(\mu)x} + 1 - e^{-\mathrm{Re}(\mu)(1-x)}\right) \leq \frac{\|f\|_\infty}{\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|}
\end{aligned}
$$

und folglich

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{2}{\mathrm{Re}(\mu)\,|\mu|}.$$

Wegen $\lambda \in \Sigma_\theta$ ist $\mu \in \Sigma_{\frac{\theta}{2}}$ und $\mathrm{Re}(\mu) = |\mu|\cos(\mathrm{Arg}(\mu)) \geq |\mu|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0$. Deshalb ist in der Tat

$$\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{2}{|\mu|^2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{2}{|\lambda|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

(b) Klar: A ist linearer Operator. Nach Lemma 1 der Übung ist A abgeschlossen. Nach Satz 8 der Übung (Stone-Weierstraß), ist $D(A)$ dicht in X. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ und $f \in X$. Nach Lemma 7 der Übung hat die Gleichung

$$\lambda u - Au = f \Leftrightarrow u' = f - \lambda u$$

die allgemeine Lösung

$$u(x) = Ce^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda \tau} f(\tau) \mathrm{d}\tau \qquad (x \in [0,1])$$

mit freier Konstante $C \in \mathbb{C}$. Es gilt ferner

$$\begin{aligned} u'(0) = u(1) \quad &\Leftrightarrow \quad -\lambda u(0) + f(0) = u(1) \\ &\Leftrightarrow \quad -C\lambda + f(0) = Ce^{-\lambda} + e^{-\lambda} \int_0^1 e^{\lambda\tau} f(\tau) \mathrm{d}\tau \\ &\Leftrightarrow \quad f(0) - e^{-\lambda} \int_0^1 e^{\lambda\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau = C(\lambda + e^{-\lambda}) \end{aligned}$$

Ist $\lambda + e^{-\lambda} = 0$, so ist die obige Gleichung für jedes $C \in \mathbb{C}$ oder für kein $C \in \mathbb{C}$ erfüllt. Ist $\lambda + e^{-\lambda} \neq 0$, so ist die obige Gleichung zu

$$C = \frac{f(0) - e^{-\lambda} \int_0^1 e^{\lambda\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau}{\lambda + e^{-\lambda}} =: a(\lambda, f)$$

äquivalent. Also ist

$$\rho(A) = \mathbb{C} \setminus \left\{ \lambda \in \mathbb{C} | \, \lambda + e^{-\lambda} = 0 \right\}$$

und

$$(R(\lambda, A)f)(x) = a(\lambda, f)e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} \int_0^x e^{\lambda\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (x \in [0,1])$$

für alle $f \in X$ und alle $\lambda \in \rho(A)$.

Sei nun $s > 1$. Dann ist $\mathrm{i}s \in \rho(A)$. Für jedes $x \in [0,1]$ sei $f_s(x) = e^{-\mathrm{i}sx}$. Dann ist $\|f_s\|_\infty = 1$ und es gilt

$$\begin{aligned} \|R(\mathrm{i}s, A)\| \quad &\geq \quad \|R(\mathrm{i}s, A)f_s\|_\infty \geq |(R(\mathrm{i}s, A)f_s)(1)| \\ &= \quad \left| a(\mathrm{i}s, f_s)e^{-\mathrm{i}s} + e^{-\mathrm{i}s} \int_0^1 e^{\mathrm{i}s\tau} e^{-\mathrm{i}s\tau} \mathrm{d}s \right| = |1 + a(\mathrm{i}s, f_s)| \\ &= \quad \left| 1 + \frac{1 - e^{-\mathrm{i}s} \int_0^1 e^{\mathrm{i}s\tau} e^{-\mathrm{i}s\tau} \mathrm{d}\tau}{\mathrm{i}s + e^{-\mathrm{i}s}} \right| \\ &= \quad \left| 1 + \frac{1 - e^{-\mathrm{i}s}}{\mathrm{i}s + e^{-\mathrm{i}s}} \right| \xrightarrow{s \to \infty} 1 \neq 0. \end{aligned}$$

Nach Satz 2.12 (d) der Vorlesung, kann A demnach keine beschränkte analytische Halbgruppe erzeugen.

Aufgabe 21:

Sei $T(\,\cdot\,) = (\tau_{ij}(\,\cdot\,))_{i,j \in \{1,\ldots,d\}}$ Klar: $T(t)x \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und $x \geq 0$ gilt dann und nur dann, wenn $\tau_{ij}(t) \geq 0$ für alle $t \geq 0$ und alle $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Für den Erzeuger $A = (\alpha_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,d\}}$ gilt

$$\alpha_{ij} = \langle Ae_j | e_i \rangle = \lim_{t \to 0+} \left\langle \frac{T(t)e_j - e_j}{t} | e_i \right\rangle = \lim_{t \to 0+} \frac{\tau_{ij}(t) - \delta_{ij}}{t}$$

für jedes $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Sei nun $T(\,\cdot\,)$ eine positive Halbgruppe. Dann gilt nach obiger Gleichung $\alpha_{ij} \geq 0$, falls $i \neq j$ und $\alpha_{ii} \in \mathbb{R}$ für jedes $i, j \in \{1, \ldots, d\}$. Matrizen mit dieser Eigenschaft nennt man *Metzler-Matrizen.*

Sei nun umgekehrt A eine Metzler-Matrix. Setze $\lambda := \max\{|\alpha_{ii}| \mid i \in \{1, \dots, d\}\}$. Dann hat $B := A + \lambda I$ nur nicht-negative Einträge. Folglich hat

$$e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n B^n}{n!} \qquad \text{und} \qquad e^{-t\lambda I} = e^{-t\lambda} I$$

für jedes $t \geq 0$ nur nicht-negative Einträge. Da $-\lambda I$ mit B vertauscht, gilt

$$e^{tA} = e^{t(A+\lambda I) - t\lambda I} = e^{tB} e^{-t\lambda I} = e^{-t\lambda} e^{tB}$$

für jedes $t \geq 0$ und die Halbgruppe $T(\,\cdot\,)$ ist positiv.

Folglich erzeugen genau die Metzler-Matrizen positive Halbgruppen.