Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
15.06.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 09. Übungsblatt

Satz 15. *Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$, $q : \Omega \to \mathbb{C}$ $\mathcal{A}$-messbar mit $\operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \operatorname{Re} q(\omega) =: M < \infty$ und $Bf = qf$ für alle $f \in D(B) := \{g \in L^p(\Omega) |\, qg \in L^p(\Omega)\}$. Dann definiert*

$$(T(t)f)(\omega) = e^{tq(\omega)} f(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega \,\forall f \in L^p(\Omega) \,\forall t \geq 0$$

die C_0-Halbgruppe $(T(t))_{t\geq 0}$ in $L^p(\Omega)$ mit Erzeuger B und Wachstumsschranke $\omega_0(T) \leq M$.

Beweis. Setze $M := \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} \operatorname{Re} q(\omega) < \infty$ und $N \in \mathcal{A}$ derart, dass $\mu(N) = 0$ und $\operatorname{Re} q(\omega) \leq M$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Wir beobachten, dass wegen

$$|(T(t)f)(\omega)| = \left|e^{tq(\omega)} f(\omega)\right| = e^{t \operatorname{Re} q(\omega)} |f(\omega)| \leq e^{tM} |f(\omega)| \quad \forall \omega \in \Omega \setminus N \,\forall f \in L^p(\Omega) \,\forall t \geq 0, \tag{1}$$

tatsächlich $T(t)f \in L^p(\Omega)$, $T(t) \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ und $\|T(t)\|_p \leq e^{tM}$ für jedes $t \geq 0$.

Die Halbgruppeneigenschaft ist klar.

Zum Beweis der starken Stetigkeit in $t = 0$ sei $f \in L^p(\Omega)$. Nach (1) ist $\lim_{t\to 0+}(T(t)f)(\omega) = f(\omega)$ und $|(T(t)f)(\omega)| \leq e^M |f(\omega)|$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ und alle $0 \leq t \leq 1$. Nach dem Satz von der dominierten Konvergenz ist $\|T(t)f - f\|_p \xrightarrow{t\to 0+} 0$.

Also ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine C_0-Halbgruppe. Sei C ihr Erzeuger. Bleibt zu zeigen $B = C$.

- „$\subseteq$“: Sei $f \in D(B)$. Zeige $f \in D(C)$ und $Bf = Cf$. Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $\frac{\partial T(\,\cdot\,)f}{\partial t}(0, \omega) = q(\omega)f(\omega)$. Für jedes $0 < t \leq 1$ und jedes $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt

$$\begin{aligned}\left|\frac{(T(t)f)(\omega) - f(\omega)}{t}\right| &= \left|\frac{e^{tq(\omega)} - 1}{t}\right| |f(\omega)| = \frac{1}{t}\left|\int_0^t q(\omega)e^{sq(\omega)} \mathrm{d}s\right| |f(\omega)| \\ &\leq \frac{1}{t}\int_0^1 e^{s \operatorname{Re} q(\omega)} \mathrm{d}s\, |q(\omega)f(\omega)| \leq \frac{1}{t}\int_0^1 e^{M} \mathrm{d}s\, |q(\omega)f(\omega)| \\ &= e^M |q(\omega)f(\omega)|\,.\end{aligned}$$

  Da nach Voraussetzung $f \in D(B)$, ist $qf \in L^p(\Omega)$ und der Satz von der Differenzierbarkeit von Parameterintegralen liefert $\left\|\frac{T(t)f-f}{t} - qf\right\|_p \xrightarrow{t\to 0+} 0$. Also ist $f \in D(C)$ und $Bf = Cf$.

- „$\supseteq$”: Sei $f \in D(C)$. Zeige $f \in D(B)$ und $Cf = Bf$. Sei dazu $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in R^+ mit $\lim_{n\to\infty} t_n = 0$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{T(t_n)f - f}{t_n} - Cf\right\|_p = 0.$$

In $L^p(\Omega)$ konvergente Funktionenfolgen haben μ-fast-überall punktweise konvergente Teilfolgen. Sei also $(t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ derart, dass

$$Cf(\omega) = \lim_{k\to\infty} \frac{T(t_{n_k})f(\omega) - f(\omega)}{t_{n_k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^{t_{n_k} q(\omega)} - 1}{t_{n_k}} f(\omega) = q(\omega)f(\omega)$$

für μ-fast-alle $\omega \in \Omega$. Da $C : D(C) \to Ł^p(\Omega)$ folgt $f \in D(B)$ und $Cf = Bf$.

$\square$

Aufgabe 22:

O.B.d.A. ist $\mu(\Omega) > 0$, denn sonst ist $L^p(\Omega) = \{0\}$ (nach Identifikation der Funktionen in $L^p(\Omega)$ mit ihren Äquivalenzklassen bezüglich Gleichheit μ-fast-überall). Dann ist aber $\|A\| = 0 = \|m\|_\infty$, $m_{\text{ess}}(\Omega) = \emptyset = \sigma(A)$ und $e^{\mathrm{i}\varphi t A} = I_X$ für alle $t \geq 0$ und alle $\varphi \in (-\pi, \pi)$.

(a)

- „$\Rightarrow$": Sei also $A \in \mathcal{L}(X)$. Angenommen $\|m\|_\infty = \infty$. Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei $U_n := \{\omega \in \Omega | \ |m(\omega)| \geq n\} \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mu(U_n) > 0$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da Ω σ-endlich ist und $\mu(\Omega) > 0$, existiert eine Folge $(\Omega_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{A}$ mit $0 < \mu(\Omega_l) < \infty$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \bigcup_{l\in N} \Omega_l$. Definiere $V_{nl} := U_n \cap \Omega_l$ für alle $n, l \in \mathbb{N}$. Wegen $U_n = \bigcup_{l\in\mathbb{N}} V_{nl}$ ist $0 < \mu(U_n) \leq \sum_{l=1}^\infty \mu(V_{nl})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $l(n) \in \mathbb{N}$ mit $0 < \mu(V_{nl(n)}) < \infty$. Definiere $V_n := V_{nl(n)} \in \mathcal{A}$ und beobachte $0 < \mu(V_n) < \infty$, für jedes $\omega \in V_n$ ist $|m(\omega)| \geq n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Setze nun

$$f_n := \begin{cases} \frac{\mathbb{1}_{V_n}}{\mu(V_n)^{\frac{1}{p}}} & \text{für } p < \infty, \\ \mathbb{1}_{V_n} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

  Dann ist

$$\|f_n\|_p = \begin{cases} \left(\int_\Omega |f_n(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |f_n(\omega)| & \text{für } p = \infty \end{cases} = \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(V_n)} \int_\Omega \mathbb{1}_{V_n} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |\mathbb{1}_{V_n}(\omega)| & \text{für } p = \infty \end{cases} = 1.$$

  Aber

$$\begin{aligned} \|Af_n\|_p &= \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(V_n)} \int_\Omega |m(\omega)|^p \,\mathbb{1}_{V_n} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in\Omega} |m(\omega)\mathbb{1}_{V_n}(\omega)| & \text{für } p = \infty \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(V_n)} \int_{V_n} |m(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\omega\in V_n} |m(\omega)| & \text{für } p = \infty \end{cases} \geq n \xrightarrow{n\to\infty} \infty. \end{aligned}$$

  Folglich ist A nicht beschränkt, im Widerspruch zur Voraussetzung.

- „$\Leftarrow$": Sei also $m \in L^\infty(\Omega)$. Für jedes $f \in L^p(\Omega)$ gilt

$$\|Af\|_p = \|mf\|_p \leq \|m\|_\infty \|f\|_p \,.$$

  Folglich ist $A \in \mathcal{L}(X)$.

$\square$

(b) Wir zeigen die äquivalente Aussage $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}(\Omega)$.

- „$\supseteq$“: Sei etwa $\lambda \in \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}(\Omega)$. Zu zeigen ist $\lambda \in \rho(A)$. Nach Definition existiert ein $\varepsilon > 0$ derart, dass für

  $$N_\lambda := \{\omega \in \Omega |\ |\lambda - \mu(\omega)| < \varepsilon\} \in \mathcal{A} \qquad \text{gilt} \qquad \mu(N_\lambda) = 0.$$

  Definiere $q : \Omega \to \mathbb{C}$ durch

  $$q(\omega) := \begin{cases} \frac{1}{\lambda - m(\omega)} & \text{für } \omega \in \Omega \setminus N_\lambda, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

  Dann ist

  $$|q(\omega)| \leq \sup_{\omega' \in \Omega \setminus N_\lambda} \frac{1}{|\lambda - m(\omega')|} \leq \frac{1}{\varepsilon}$$

  für alle $\omega \in \Omega$. Also ist $q \in L^\infty(\Omega)$. Nach vorhergehendem Aufgabenteil ist also $B \in \mathcal{L}(L^p(\Omega))$ für $Bf := qf$ für alle $f \in L^p(\Omega)$. Sei $f \in L^p(\Omega)$. Es gilt

  $$(\lambda I - A)Bf(\omega) = \begin{cases} \frac{\lambda - m(\omega)}{\lambda - m(\omega)} f(\omega) & \text{für } \omega \in \Omega \setminus N_\lambda, \\ 0 & \text{für } \omega \in N_\lambda \end{cases} = \begin{cases} f(\omega) & \text{für } \omega \in \Omega \setminus N_\lambda, \\ 0 & \text{für } \omega \in N_\lambda \end{cases} \qquad \forall \omega \in \Omega.$$

  Folglich ist $Bf \in D(A)$ und $(\lambda I - A)Bf = f$ μ-fast-überall. Ist $f \in D(A)$, so zeigt die gleiche Rechnung $B(\lambda I - A)f = f$ in X. Damit ist $\lambda \in \rho(A)$ und $B = R(\lambda, A)$.

- „$\subseteq$”: Sei $\lambda \in \rho(A)$. Zu zeigen ist, dass $\lambda \in \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}(\Omega)$. Angenommen $\lambda \in m_{\text{ess}}(\Omega)$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Per Definition ist dann

  $$\mu(A_n) > 0 \qquad \text{für} \qquad A_n := \left\{\omega \in \Omega |\ |\lambda - m(\omega)| < \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}.$$

  Da X σ-endlich ist, ist O.B.d.A. $\mu(A_n) < \infty$ (vgl. erste Teilaufgabe). Setze nun

  $$f_n := \begin{cases} \frac{\mathbb{1}_{A_n}}{\mu(A_n)^{\frac{1}{p}}} & \text{für } p < \infty, \\ \mathbb{1}_{A_n} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

  Dann ist $\|f_n\|_p = 1$ und

  $$\begin{aligned} \|(\lambda I - A)f_n\|_p &= \begin{cases} \left(\frac{1}{\mu(A_n)} \int_{A_n} |\lambda - m(\omega)|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{\omega \in A_n} |\lambda - m(\omega)| & \text{für } p = \infty \end{cases} \\ &\leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

  Insbesondere ist $f_n \in D(A)$. Es folgt $\|(\lambda I - A)f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Damit kann $(\lambda I - A)$ keine stetige Inverse haben, also $\lambda \notin \rho(A)$ im Widerspruch zur Voraussetzung.

□

(c)
- „$\Rightarrow$”: Möge A eine beschränkte analytische Halbgruppe vom Winkel $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ erzeugen. Nach Satz 2.12 (c) der Vorlesung ist $\Sigma_{\theta + \frac{\pi}{2}} \subseteq \rho(A)$. Nach vorhergehendem Aufgabenteil ist aber $\rho(A) = \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}(\Omega)$. Also gilt in der Tat

  $$\Sigma_{\theta + \frac{\pi}{2}} \subseteq \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}(\Omega).$$

- „$\Leftarrow$": Gelte $\Sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}} \subseteq \rho(A) = \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}(\Omega)$. Zu zeigen ist, dass A eine beschränkte analytische Halbgruppe vom Winkel θ in $L^p(\Omega)$ erzeugt. Nach Satz 2.12 der Vorlesung reicht es zu zeigen, dass für jedes $0 \leq \varphi < \theta$ die Operatoren $e^{\pm i\varphi}A$ beschränkte C_0-Halbgruppen erzeugen.

  Zeige zunächst $\mu(\{\omega \in \Omega | \, m(\omega) \notin m_{\text{ess}}(\Omega)\}) = \mu^m(\mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}) = 0$. Nach Voraussetzung existiert zu jedem $\lambda \in \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}$ ein $\varepsilon_\lambda > 0$ mit $\mu^m(B_{\varepsilon_\lambda}(\lambda)) = 0$. Der Vorlesung Analysis II entnimmt man, dass jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt. Also ist

  $$\mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}} B_{\varepsilon_\lambda}(\lambda) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_{\varepsilon_{\lambda_i}}(\lambda_i)$$

  mit geeigneten $\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}$. Also ist in der Tat

  $$\mu^m(\Sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}}) \leq \mu^m(\mathbb{C} \setminus m_{\text{ess}}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^m(B_{\varepsilon_{\lambda_i}}(\lambda_i)) = 0.$$

  Es folgt damit

  $$\operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re}\left[e^{\pm \mathrm{i}\varphi} m(\omega)\right] \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \left[|m(\omega)| \cos\left(\pm\varphi + \operatorname{Arg}(m(\omega))\right)\right]$$

  mit der Konvention $\operatorname{Arg}(0) = \pi$. Wegen $0 \leq \varphi < \theta$ und $m(\omega) \in \mathbb{C} \setminus \Sigma_{\theta+\frac{\pi}{2}}$ für μ-fast-alle $\omega \in \Omega$, ist

  $$\frac{\pi}{2} < \underbrace{\operatorname{Arg}(m(\omega))}_{\geq \theta + \frac{\pi}{2}} - \underbrace{\varphi}_{<\theta} \leq |\pm\varphi + \operatorname{Arg}(m(\omega))| \leq \underbrace{\varphi}_{<\theta<\frac{\pi}{2}} + \underbrace{|\operatorname{Arg}(m(\omega))|}_{\leq \pi} < \frac{3}{2}\pi$$

  für μ-fast-alle $\omega \in \Omega$. Also ist $\operatorname{ess\,sup}_{\omega \in \Omega} \operatorname{Re}\left[e^{\pm \mathrm{i}\varphi} m(\omega)\right] \leq 0$. Nach Satz 15 der Übung, erzeugen $e^{\pm \mathrm{i}\varphi}A$ tatsächlich beschränkte C_0-Halbgruppen. $\square$

Aufgabe 23:

(a) Wir suchen zunächst eine $C^1(\overline{\Omega})$-*Cutoff*-Funktion Ψ, die den folgenden Bedingungen genügt:

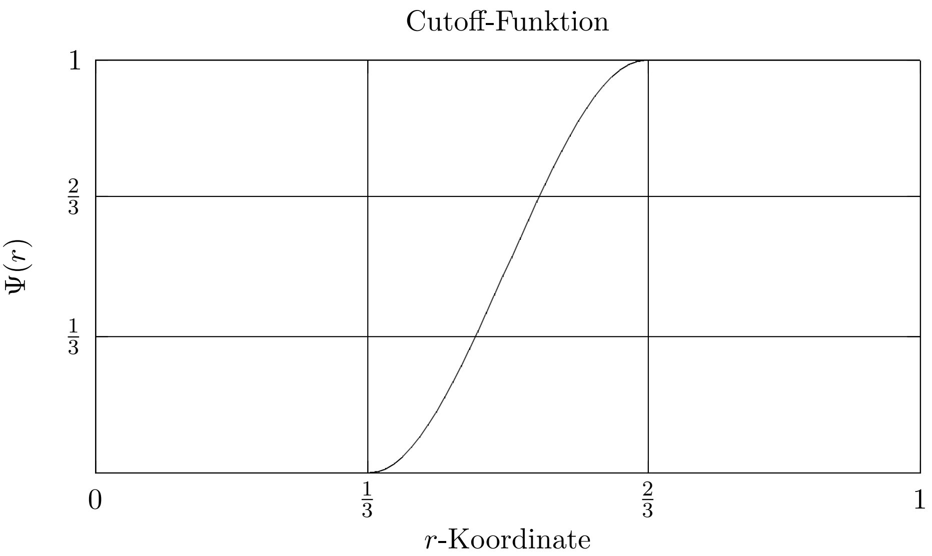
   (i) $0 \leq \Psi \leq 1$

   (ii) $\Psi|_{B_{\frac{1}{3}}(0)} \equiv 0$

   (iii) $\Psi|_{B_1(0) \setminus B_{\frac{2}{3}}(0)} \equiv 1$

   Ein solches Ψ ist gegeben durch

   $$\Psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 \leq \|x\|_2 < \frac{1}{3}, \\ 27\left(\|x\|_2 - \frac{1}{3}\right)^2 - 54\left(\|x\|_2 - \frac{1}{3}\right)^3 & \text{für } \frac{1}{3} \leq \|x\|_2 \leq \frac{2}{3}, \\ 1 & \text{für } \frac{2}{3} < \|x\|_2 \leq 1. \end{cases}$$



Man erhält es, indem man das Interpolationsproblem

(i) $P\left(\frac{1}{3}\right) = 0$,

(ii) $P'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$,

(iii) $P\left(\frac{2}{3}\right) = 1$,

(iv) $P'\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

durch ein Polynom dritten Grades löst.

Sei $C_1 := \|\nabla\Psi\|_\infty$. Für alle $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\Psi u\|^2_{W_2^1(\Omega)} &= \int_\Omega |\Psi(x)u(x)|^2 + \|(\nabla\Psi u)(x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |\Psi(x)u(x)|^2 + \|\Psi(x)(\nabla u)(x) + u(x)(\nabla\Psi)(x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega |u(x)|^2 + \left(\|(\nabla u)(x)\|_2 + |u(x)| \underbrace{\|\nabla\Psi\|_\infty}_{=C_1}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&\leq \int_\Omega (1 + C_1^2)\,|u(x)|^2 + 2\,|u(x)|\,\|\nabla u(x)\|_2 + \|\nabla u(x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} (1 + C_1^2)\,\|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} + 2 \underbrace{\sqrt{\int_\Omega |u(x)|^2 \,\mathrm{d}x}}_{\leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \underbrace{\sqrt{\int_\Omega \|\nabla u(x)\|_2^2 \,\mathrm{d}x}}_{\leq \|u\|_{W_2^1(\Omega)}} \\
&\leq \underbrace{(3 + C_1^2)}_{=:C_2^2} \|u\|^2_{W_2^1(\Omega)} \,. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Definiere $\Omega' := B_1(0) \setminus B_{\frac{1}{3}}(0)$. Für jedes $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ gilt

$$\begin{aligned}
\|Tu\|_2^2 &= \|T\Psi u\|_2^2 = \int_{\partial\Omega} |\Psi u(x)|^2 \,\mathrm{d}\sigma(x) = \int_{\partial\Omega} |\Psi u(x)|^2 \underbrace{e_r(x)\cdot\nu(x)}_{=1} \mathrm{d}\sigma(x) \\
&\overset{\text{Gauß}}{=} \int_\Omega \nabla\cdot\left(|\Psi u|^2 e_r\right) \mathrm{d}x = \int_{\Omega'} \nabla\cdot\left(|\Psi u|^2 e_r\right) \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{=} \int_{\Omega'} \left(\nabla|\Psi u|^2\right)\cdot e_r + |\Psi u|^2 \underbrace{\nabla\cdot e_r}_{=\frac{2}{|x|}\le 6} \mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Kettenregel}}{\le} \int_{\Omega'} 2\,\mathrm{Re}\left(\Psi(x)u(x)\overline{(\nabla\Psi u)(x)}\right)\cdot e_r + 6\,|\Psi(x)u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{C-S-U}}{\le} 2\int_{\Omega'} |\Psi(x)u(x)|\,\|(\nabla\Psi u)(x)\|_2 + 6\int_{\Omega'} |\Psi(x)u(x)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\overset{\text{Hölder}}{\le} 2\underbrace{\sqrt{\int_\Omega |\Psi(x)u(x)|^2\,\mathrm{d}x}}_{\le\|u\|_{W_2^1(\Omega)}}\underbrace{\sqrt{\int_\Omega \|(\nabla\Psi u)(x)\|_2^2\,\mathrm{d}x}}_{\le\|u\|_{W_2^1(\Omega)}} + 6\underbrace{\int_\Omega |\Psi(x)u(x)|^2\,\mathrm{d}x}_{\le\|u\|_{W_2^1(\Omega)}^2} \\
&\le 8\,\|\Psi u\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \overset{(2)}{\le} 8(3+C_1^2)\,\|u\|_{W_2^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

(b) Sei $u \in W_2^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. O.B.d.A. ist $u \in C(\mathbb{R}^3)$, denn

$$\overline{u} = \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \le \|x\|_2 \le 1, \\ u\left(\frac{x}{\|x\|_2}\right) & \text{für } \|x\|_2 > 1 \end{cases}$$

ist eine stetige Fortsetzung von u auf $\mathbb{R}^3$. Nach Aufgabe 14 (c) (ii) gilt $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} u$ gleichmäßig auf $\overline{\Omega}$. Nach Aufgabe 14 (c) (iv) gilt $u_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon\to 0+} u$ bezüglich $\|\cdot\|_{W_2^1(\Omega)}$. Da $\overline{T}: W_2^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ stetig ist, gilt

$$\overline{T}(u) = \lim_{\varepsilon\to 0+} T(u_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0+} u_\varepsilon|_{\partial\Omega},$$

wobei der letzte Limes bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$ gebildet wird. Nach Obigem ist aber $\lim_{\varepsilon\to 0+} u_\varepsilon|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$, also erst recht bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(\partial\Omega)}$. □

(c) Angenommen, es existiert ein solcher Operator S. Betrachte die Folge stetiger Funktionen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $u_n(x) = \|x\|_2^n$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ und alle $n \in \mathbb{N}$. Für die Folge der $L^2(\Omega)$-Normen gilt (Kugelkoordinaten)

$$\|u_n\|_2^2 = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \int_0^1 r^{2n} r^2 \sin(\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 4\pi \int_0^1 r^{2n+2}\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{2n+3} \overset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Aber

$$\|Su_n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \|u_n|_{\partial\Omega}\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \sin(\theta)\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = 4\pi$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist für kein $C > 0$ die Ungleichung $\|Su\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C\,\|u\|_2$ für alle $u \in L^2(\Omega)$ erfüllt. □

http://www.math.kit.edu/iana1/lehre/evoglgen2015s/