Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
22.06.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 10. Übungsblatt

Definition 16. *Sei $d \in \mathbb{N}$. Der Vektorraum*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^d) \,|\, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^d : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| x^\alpha (D^\beta f)(x) \right| < \infty \right\}$$

heißt Schwartz-Raum.

Lemma 17. *Die Fourier-Transformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^d) \to L^\infty(\mathbb{R}^d)$ definiert durch*

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathrm{i}\xi \cdot x} f(x) \mathrm{d}x \qquad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^d)$$

ist eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Ihre Inverse $\mathcal{F}^{(-1)} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ist durch

$$(\mathcal{F}^{(-1)} f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\mathrm{i}x \cdot \xi} f(\xi) \mathrm{d}\xi \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

gegeben. Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt

(i) $\overline{\mathcal{F}f} = (\mathcal{F}\overline{f})(-\,\cdot\,)$,

(ii) $\mathcal{F}(D^\alpha f)(\xi) = (\mathrm{i})^{|\alpha|} \xi^\alpha (\mathcal{F}f)(\xi)$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}^d$,

(iii) $(D^\alpha \mathcal{F} f)(\xi) = (-\mathrm{i})^{|\alpha|} \mathcal{F}(x^\alpha f)(\xi)$ *für alle* $\xi \in \mathbb{R}^d$,

(iv) $(\mathcal{F}^{(-1)} f) = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mathcal{F}f)(-\,\cdot\,) = \frac{1}{(2\pi)^d} (\mathcal{F}(f(-\,\cdot\,))$,

(v) $\int_{\mathbb{R}^d} (\mathcal{F}f)(\xi) g(\xi) \mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) (\mathcal{F}g)(x) \mathrm{d}x$ *(*Dancing-Hat-Identität*)*,

(vi) $\|\mathcal{F}f\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2$ *(*Plancherel-Identität*)*.

Beweis. Siehe Literatur, etwa Satz 2.2.14 und Korollar 2.2.15 in: Grafakos, Lukas. „Classical Fourier Analysis“. Springer Graduate Texts in Mathematics 249, 2008. □

Aufgabe 24:

(a) Nach Lemma 17 ist $\mathcal{F}f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, folglich $m\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und damit $T_m f = \mathcal{F}^{(-1)}(m\mathcal{F}(f)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$ für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Damit ist T_m wohldefiniert.

Zeige nun Abschließbarkeit: Sei dazu $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $D(T_m) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} 0$ und $T_m f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_p} g$ für $n \to \infty$. Zu zeigen ist $g = 0$. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht ist in

$L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, reicht es $\langle g|h\rangle = 0$ für alle $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen. Wegen der Hölder-Ungleichung ist die duale Paarung $\langle \cdot | \cdot \rangle : L^p \times L^{p'} \to \mathbb{C}$ mit

$$\langle v|w\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} v(x)w(x)\mathrm{d}x \qquad \forall v \in L^p(\mathbb{R}^d)\, \forall w \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$$

stetig. Für $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt folglich

$$\begin{aligned}
\langle g|h\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle T_m f_n | g\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle \mathcal{F}^{(-1)}(m\mathcal{F}(f_n))|g\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \left\langle \mathcal{F}((m\mathcal{F}f_n)(-\,\cdot\,))|g\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \left\langle (m\mathcal{F}f_n)(-\,\cdot\,)|\mathcal{F}g\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \left\langle (m\mathcal{F}f_n)|\mathcal{F}g(-\,\cdot\,)\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \left\langle \mathcal{F}f_n | m(\mathcal{F}g(-\,\cdot\,))\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^d} \left\langle f_n | \mathcal{F}m(\mathcal{F}g(-\,\cdot\,))\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle f_n | \mathcal{F}^{(-1)}[m(\mathcal{F}g(-\,\cdot\,))(-\,\cdot\,)]\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f_n | \overline{\mathcal{F}^{(-1)}\overline{[m(\mathcal{F}g(-\,\cdot\,))]}}\right\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\langle f_n | \overline{\mathcal{F}^{(-1)}\overline{m}(\mathcal{F}\overline{g}}\right\rangle = \lim_{n\to\infty} \left\langle f_n | \overline{T_{\overline{m}}\overline{g}}\right\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Also ist in der Tat $g = 0$.

(b) Nach Vorlesung ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W_2^s(\mathbb{R}^d)$. Per Definition ist $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $D(\overline{T_m})$ bezüglich der Graphennorm $\|\cdot\|_{\overline{T_m}}$. Es reicht also zu zeigen, dass auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ die Normen $\|\cdot\|_{W_2^s(\mathbb{R}^d)}$ und $\|\cdot\|_{T_m}$ äquivalent sind.

- „$\|\cdot\|_{T_m} \lesssim \|\cdot\|_{W_2^s}$": Wir beobachten vorbereitend, dass für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$

$$(1+\|\xi\|_2^2)^{\frac{s}{2}} \leq \begin{cases} 2^{\frac{s}{2}} & \text{für } \|\xi\|_2^2 \leq 1, \\ 2^{\frac{s}{2}}\, \|\xi\|_2^s & \text{für } \|\xi\|_2^2 > 1 \end{cases} \leq 2^{\frac{s}{2}}(1+\|\xi\|_2^s), \tag{1}$$

sowie

$$\|\xi\|_2^s = \left(\sum_{i=1}^d |\xi_i|^2\right)^{\frac{s}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^d \max_{j\in\{1,\dots,d\}} |\xi_j|^2\right)^{\frac{s}{2}} = d^{\frac{s}{2}} \max_{j\in\{1,\dots,d\}} |\xi_j|^s \leq d^{\frac{s}{2}} \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d \\ |\beta|=s}} \left|\xi^\beta\right| \tag{2}$$

gilt. Damit folgt für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{T_m} &= \|f\|_2 + \|T_m f\|_2 = \|f\|_2 + \left\|\mathcal{F}^{(-1)}(m\mathcal{F}(f))\right\|_2 \\
&= \|f\|_2 + \frac{1}{(2\pi)^d}\|(m\mathcal{F}(f))\|_2 = \|f\|_2 + \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|(1+\|\xi\|_2^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f))\right\|_2 \\
&\overset{(1)}{\leq} \|f\|_2 + \frac{2^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^d}\|(1+\|\xi\|_2^s)\mathcal{F}(f))\|_2 \\
&\leq \|f\|_2 + \frac{2^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^d}\left(\|\mathcal{F}(f))\|_2 + \|\|\xi\|_2^s\,\mathcal{F}(f))\|_2\right) \\
&= \|f\|_2\,(1+2^{\frac{s}{2}}) + \frac{2^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^d}\|\|\xi\|_2^s\,\mathcal{F}(f))\|_2 \\
&\overset{(2)}{\leq} \|f\|_2\,(1+2^{\frac{s}{2}}) + \frac{(2d)^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^d}\left\|\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|=s}}\left|\xi^\beta\right|\mathcal{F}(f))\right\|_2 \\
&\leq \|f\|_2\,(1+2^{\frac{s}{2}}) + \frac{(2d)^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^d}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|=s}}\left\|(\mathrm{i})^{|\beta|}\xi^\beta\mathcal{F}(f))\right\|_2 \\
&= \|f\|_2\,(1+2^{\frac{s}{2}}) + \frac{(2d)^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^d}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|=s}}\left\|\mathcal{F}(D^\beta f))\right\|_2 \\
&= \|f\|_2\,(1+2^{\frac{s}{2}}) + (2d)^{\frac{s}{2}}\sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|=s}}\left\|D^\beta f\right\|_2 \leq (1+2(2d)^{\frac{s}{2}})\,\|f\|_{W_2^s(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

- „$\|\cdot\|_{W_2^s} \lesssim \|\cdot\|_{T_m}$": Wir zeigen vorbereitend die Ungleichung zwischen dem geometrischen und dem arithmetischen Mittel. Seien $\xi_i \geq 0$, $0 \leq \alpha_i \leq 1$ für alle $i \in \{1,\dots,d\}$ und $\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$. Dann gilt
$$\prod_{i=1}^d \xi_i^{\alpha_i} \leq \sum_{i=1}^d \alpha_i\xi_i, \tag{3}$$
denn: O.B.d.A. seien $\xi_i > 0$ und $0 < \alpha_i < 1$ für alle $i \in \{1,\dots,d\}$ (sonst ist nichts zu zeigen). Dann ist (3) äquivalent zu
$$\sum_{i=1}^d \alpha_i \log(\xi_i) \leq \log\left(\sum_{i=1}^d \alpha_i\xi_i\right),$$
was eine wahre Aussage ist, da log eine konkave Funktion ist ($\frac{\mathrm{d}^2\log}{\mathrm{d}x^2}(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x > 0$).

  Damit folgt
$$|\xi^\alpha| \leq \|\xi\|_2^{|\alpha|} \tag{4}$$
für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, denn: O.B.d.A. ist $\alpha \neq 0$ (sonst ist nichts zu zeigen).

Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned}
|\xi|^\alpha &= \prod_{i=1}^d |\xi_i|^{\alpha_i} = \left(\prod_{i=1}^d |\xi_i|^{\frac{\alpha_i}{|\alpha|}}\right)^{|\alpha|} \overset{(3)}{\leq} \left(\sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i}{|\alpha|}\,|\xi_i|\right)^{|\alpha|} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^d \left[\frac{\alpha_i}{|\alpha|}\right]^2} \left(\sum_{i=1}^d |\xi_i|^2\right)^{\frac{|\alpha|}{2}} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^d \frac{\alpha_i}{|\alpha|}}\, \|\xi\|_2^{|\alpha|} \\
&= \|\xi\|_2^{|\alpha|}.
\end{aligned}$$

Es folgt für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W_2^s(\mathbb{R}^d)} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \|D^\alpha f\|_2 = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|\mathcal{F}^{(-1)}\mathcal{F}(D^\alpha f)\right\|_2 = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|\mathcal{F}^{(-1)}\mathcal{F}(D^\alpha f)\right\|_2 \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|(\mathrm{i})^{|\alpha|}\xi^\alpha \mathcal{F}(f)\right\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \||\xi^\alpha|\,\mathcal{F}(f)\|_2 \\
&\overset{(4)}{\leq} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|\|\xi\|_2^{|\alpha|}\,\mathcal{F}(f)\right\|_2 \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|(1+\|\xi\|_2^2)^{\frac{|\alpha|}{2}}\mathcal{F}(f)\right\|_2 \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|(1+\|\xi\|_2^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)\right\|_2 = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} \left\|\mathcal{F}^{(-1)}(1+\|\xi\|_2^2)^{\frac{s}{2}}\mathcal{F}(f)\right\|_2 \\
&\leq \|f\|_{T_m} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d\\|\alpha|\leq s}} 1.
\end{aligned}$$

(c) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{m(\mathbb{R}^d)}$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $|\lambda - m(\xi)| \geq \delta$ für alle $\xi \in \mathbb{R}^d$. Damit ist $a := \frac{1}{\lambda - m} \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Da für jedes $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^d$ Konstanten $D_{\alpha,\beta} \in \mathbb{C}$ und $k_{\alpha,\beta} \in \mathbb{N}_0$ existieren so, dass

$$D^\alpha a = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^d\\|\beta|\leq|\alpha|}} D_{\alpha,\beta} \frac{D^\beta m}{(\lambda - m)^{k_{\alpha,\beta}}}$$

gilt, sind alle partiellen Ableitungen von a polynomiell beschränkt. Setze $B := \overline{T_a}$. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\|Bf\|_2 = \left\|\mathcal{F}^{(-1)}(a\mathcal{F}(f))\right\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\,\|a\mathcal{F}(f)\|_2 \leq \|a\|_\infty \frac{1}{(2\pi)^d}\,\|\mathcal{F}(f)\|_2 = \|a\|_\infty \|f\|_2 \leq \delta\, \|f\|_2\,.$$

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$ liegt, ist $B \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^d))$ und $\|B\| \leq \|a\|_\infty$. Zeige $\lambda \in \rho(A)$ und $B = R(\lambda, A)$. Sei dazu $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Es existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ für $n \to \infty$. Da B stetig ist, gilt $Bf_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} Bf$. Nach Obigem ist $Bf_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq D(\overline{T_m})$ und

$$(\lambda I - \overline{T_m})Bf_n = f_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Da $(\lambda I - \overline{T_m})$ abgeschlossen ist, folgt $Bf \in D(\overline{T_m})$ und $(\lambda I - \overline{T_m})Bf = f$.

Sei nun $f \in D(\overline{T_m})$. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht liegt in $D(\overline{T_m})$, existiert eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} f$ und $T_m f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_2} \overline{T_m} f$. Da B stetig ist, folgt

$$B(\lambda I - T_m)f = \lim_{n\to\infty} B(\lambda I - T_m)f_n = f.$$

Also ist in der Tat $\lambda \in \rho(A)$.

Sei nun $\lambda \in m(\mathbb{R}^d)$, etwa $\lambda = m(\xi_0)$ für ein $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$. Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$ (siehe Aufgabe 14)

$$g_n = \mathcal{F}^{(-1)}\left(\left[\mathbb{1}_{B(\xi_0,\frac{1}{2n})}\right]_{\frac{1}{2n}}\right) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

und $f_n = \frac{g_n}{\|g_n\|_2}$. Dann ist $\|f_n\|_2 = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ und

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - T_m)f_n\|_2 &= \left\|\mathcal{F}^{(-1)}((\lambda - m)\mathcal{F}(f_n))\right\|_2 = \frac{1}{(2\pi)^d}\,\|(\lambda - m)\mathcal{F}(f_n)\|_2 \\
&\le \sup_{\xi\in B(\xi_0,\frac{1}{n})} |\lambda - m(\xi)|\,\frac{1}{(2\pi)^d}\,\|\mathcal{F}(f_n)\|_2 = |\lambda - m(\xi)| \xrightarrow{n\to\infty} 0.
\end{aligned}$$

Folglich kann $(\lambda I - \overline{T_m})$ keine stetige Inverse haben und $\lambda \in \sigma(\overline{T_m})$. Da das Spektrum $\sigma(\overline{T_m})$ abgeschlossen ist, muss $\sigma(\overline{T_m}) = \overline{m(\mathbb{R}^d)}$ gelten.

Aufgabe 25:

(a) Zeige zunächst, dass $D(\overline{T_a}) = W_2^k(\mathbb{R}^d)$ gilt. Gehe dazu wie in der Aufgabe 24 vor und zeige, dass $\|\cdot\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)}$ und $\|\cdot\|_{T_a}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ äquivalent sind.

- „$\|\cdot\|_{T_a} \lesssim \|\cdot\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)}$“: Da nach Lemma 17 (ii) A und T_a auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ übereinstimmen, gilt in der Tat für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

$$\begin{aligned}
\|f\|_{T_a} &= \|f\|_2 + \|T_a f\|_2 = \|f\|_2 + \|Af\|_2 \le \|f\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} + \left\|\sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha f\right\|_2 \\
&\le \|f\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} + \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\,\|D^\alpha f\|_2 \le \|f\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} + \sup_{|\beta|=k}|a_\beta| \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha f\|_2 \\
&\le \left(1 + \sup_{|\beta|=k}|a_\beta|\right)\|f\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)}\,.
\end{aligned}$$

- „$\|\cdot\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} \lesssim \|\cdot\|_{T_a}$": Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Es gilt in der Tat

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)} &= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \|D^\alpha f\|_2 \overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \||\xi^\alpha|\,\mathcal{F}(f)\|_2 \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left\|\|\xi\|_2^{|\alpha|}\,\mathcal{F}(f)\right\|_2 \le \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left\|(1+\|\xi\|_2^k)\mathcal{F}(f)\right\|_2 \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left[\|\mathcal{F}(f)\|_2 + \left\|\|\xi\|_2^k\,\mathcal{F}(f)\right\|_2\right] \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left[\|\mathcal{F}(f)\|_2 + \frac{1}{C}\,\|(\operatorname{Re} a)\mathcal{F}(f)\|_2\right] \\
&\le \frac{1}{(2\pi)^d} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left[\|\mathcal{F}(f)\|_2 + \frac{1}{C}\,\|a\mathcal{F}(f)\|_2\right] \\
&\overset{\text{Plancherel}}{=} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left[\|f\|_2 + \frac{1}{C}\,\|Af\|_2\right] \le \|f\|_{T_a} \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^d \\ |\alpha|\le k}} \left(1+\frac{1}{C}\right).
\end{aligned}$$

Da $\overline{T_a}$ stetig bezüglich $\|\cdot\|_{\overline{T_a}}$ ist und nach Obigem $\|\cdot\|_{\overline{T_a}}$ und $\|\cdot\|_{W_2^k(\mathbb{R}^d)}$ äquivalent sind, ist $\overline{T_a}$ stetig auf $W_2^k(\mathbb{R}^d)$. Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W_2^k(\mathbb{R}^d)$ liegt und A und $\overline{T_a}$ auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ übereinstimmen, gilt $A = \overline{T_a}$. $\square$

(b) Wir zeigen zunächst $\Theta < \frac{\pi}{2}$. Sei dazu $\xi \in \mathbb{R}^d$ beliebig. Es gilt

$$|\operatorname{Im} a(\xi)| \le |a(\xi)| \le \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\,|\xi^\alpha| \le \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha|\,\|\xi\|_2^{|\alpha|} = \|\xi\|_2^k \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \le \frac{\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|}{C} \operatorname{Re} a(\xi).$$

Folglich ist

$$\sup_{\|\xi\|_2=1} \left[\frac{|\operatorname{Im} a(\xi)|}{\operatorname{Re} a(\xi)}\right] \le \frac{\sum_{|\alpha|=k}|a_\alpha|}{C} < \infty \Rightarrow \arctan\left(\sup_{\|\xi\|_2=1}\left[\frac{|\operatorname{Im} a(\xi)|}{\operatorname{Re} a(\xi)}\right]\right) < \frac{\pi}{2}.$$

Nun zeigen wir, dass $\sigma(A) \subseteq \overline{\Sigma_\Theta}$ gilt. Sei dazu $\lambda \in a(\mathbb{R}^d)\setminus\{0\}$, etwa $\lambda = a(\xi)$ für ein $\xi \in \mathbb{R}^d$. Wegen $a(0)=0$, ist $\xi \neq 0$. Folglich ist $\operatorname{Re}\lambda \ge C\,\|\xi\|_2^k > 0$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arg}\lambda &= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\lambda}{\operatorname{Re}\lambda}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\frac{\lambda}{\|\xi\|_2^k}}{\operatorname{Re}\frac{\lambda}{\|\xi\|_2^k}}\right) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}\left(\sum_{|\alpha=k|} \mathrm{i}^{|\alpha|} a_\alpha \left[\frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right]^\alpha\right)}{\operatorname{Re}\left(\sum_{|\alpha=k|} \mathrm{i}^{|\alpha|} a_\alpha \left[\frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right]^\alpha\right)}\right) \\
&= \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} a\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right)}{\operatorname{Re} a\left(\frac{\xi}{\|\xi\|_2}\right)}\right), \\
|\operatorname{Arg}\lambda| &\le \arctan\left(\sup_{\|\xi\|_2=1}\frac{|\operatorname{Im} a(\xi)|}{\operatorname{Re} a(\xi)}\right).
\end{aligned}$$

Deshalb ist $a(\mathbb{R}^d) \subseteq \overline{\Sigma_\Theta}$ und auch $\sigma(A) = \overline{a(\mathbb{R}^d)} \subseteq \overline{\Sigma_\Theta}$.

Es bleibt die Resolventenabschätzung

$$\sup\left\{\|\lambda R(\lambda, A)\| \mid \lambda \notin \overline{\Sigma_\omega}\right\} < \infty$$

für jedes $\omega \in (\Theta, \pi)$ zu zeigen. Seien dazu $\omega \in (\Theta, \pi)$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \overline{\Sigma_\omega}$ und $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Nach Aufgabe 24 (c), ist $\lambda R(\lambda, A) f = \mathcal{F}^{(-1)}\left(\frac{\lambda}{\lambda - a(\xi)}\mathcal{F}(f)\right)$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\|\lambda R(\lambda, A) f\|_2 &\overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\left\|\frac{\lambda}{\lambda - a(\xi)}\mathcal{F}(f)\right\|_2 \\
&\leq \left\|\frac{\lambda}{\lambda - a(\xi)}\right\|_{L^\infty(\mathrm{d}\xi)} \frac{1}{(2\pi)^d}\|\mathcal{F}(f)\|_2 \\
&\overset{\text{Plancherel}}{=} \left\|\frac{\lambda}{\lambda - a(\xi)}\right\|_{L^\infty(\mathrm{d}\xi)} \|f\|_2
\end{aligned}$$

und somit

$$\|\lambda R(\lambda, A)\| \leq \left\|\frac{\lambda}{\lambda - a(\xi)}\right\|_{L^\infty(\mathrm{d}\xi)} \leq \frac{|\lambda|}{d\left(\lambda, \overline{\Sigma_\Theta}\right)} =: g(\lambda).$$

Da $\overline{\Sigma_\Theta}$ und $\mathbb{C}\backslash\Sigma_\omega$ invariant unter Skalierung sind — d.h. $r\overline{\Sigma_\Theta} = \overline{\Sigma_\Theta}$ bzw. $r(\mathbb{C}\backslash\Sigma_\omega) = \mathbb{C}\backslash\Sigma_\omega$ für jedes $r > 0$ — gilt

$$g(\lambda) = \frac{|\lambda|}{d(\lambda, \overline{\Sigma_\Theta})} = \frac{1}{\frac{1}{|\lambda|}d(\lambda, \overline{\Sigma_\Theta})} = \frac{1}{d\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}, \frac{1}{|\lambda|}\overline{\Sigma_\Theta}\right)} = \frac{1}{d\left(\frac{1}{|\lambda|}, \overline{\Sigma_\Theta}\right)} = g\left(\frac{\lambda}{|\lambda|}\right).$$

Sei nun $M = \{\mu \in \mathbb{C} | \; |\mu| = 1 \wedge \omega \leq |\mathrm{Arg}(\mu)| \leq \pi\}$. Es gilt

$$g(\lambda) \leq \sup_{\substack{\mu \in \mathbb{C}\backslash\Sigma_\omega \\ |\mu| = 1}} g(\mu) = \frac{1}{\inf_{\mu \in M} d(\mu, \overline{\Sigma_\Theta})}.$$

Da M kompakt und $\overline{\Sigma_\Theta}$ abgeschlossen ist und $M \cap \overline{\Sigma_\Theta} = \emptyset$, gilt

$$\inf_{\mu \in M} d(\mu, \overline{\Sigma_\Theta}) =: C > 0.$$

Tatsächlich lässt sich

$$C = \begin{cases} \sin(\omega - \Theta) & \text{für } \Theta < \omega < \Theta + \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{für } \Theta + \frac{\pi}{2} \leq \omega < \pi \end{cases}$$

nachrechnen. Also gilt in der Tat

$$\sup_{\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\Sigma_\omega}} \|\lambda R(\lambda, A)\| < \infty$$

für jedes $\Theta < \omega < \pi$. $\square$