Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
29.06.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 11. Übungsblatt

Lemma 18. *Sei X ein Banachraum, $A \in \mathcal{L}(X)$ mit $\|A\| < 1$. Dann ist $I - A$ stetig invertierbar mit*

$$(I-A)^{(-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k, \tag{1}$$

wobei die obige s.g. Neumann-Reihe *absolut konvergent ist mit*

$$\left\|(I-A)^{(-1)}\right\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|A\|^k = \frac{1}{1-\|A\|}. \tag{2}$$

Beweis. Die absolute Konvergenz der Neumann-Reihe und die Stetigkeit des durch sie definierten linearen Operators ist klar. Bleibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I-A)^{(-1)}$$

zu zeigen. Es gilt in der Tat

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)(I-A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{n=0}^{\infty} A^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A^k\right)(I-A) = \sum_{k=0}^{\infty} A^k - \sum_{n=1}^{\infty} A^n = I.$$

□

Aufgabe 26:

(a) Es gilt

$$\lambda I - (A+B) = (\lambda I - A) - B = [I - BR(\lambda, A)]\,(\lambda I - A).$$

Nach Voraussetzung ist $\lambda \in \rho(A)$, also ist $(\lambda I - A)$ stetig invertierbar. Ferner ist $\|BR(\lambda, A)\| < 1$. Nach Lemma 18 ist also $(I - BR(\lambda, A))$ stetig invertierbar. Also ist $\lambda I - (A+B)$ stetig invertierbar. Damit ist $\lambda \in \rho(A+B)$. Nach Gleichung (1) ist

$$R(\lambda, A+B) = R(\lambda, A) \sum_{k=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^k.$$

Da $\rho(A+B) \neq \emptyset$, ist $A+B$ abgeschlossen. □

(b) Klar: $A + B$ ist symmetrisch und dicht definiert. Nach Satz 1.40 (c) reicht es aus, ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zu finden so, dass

$$zI - (A+B)^* \qquad \text{und} \qquad \overline{z} - (A+B)^*$$

injektiv sind.

Wir zeigen vorbereitend: Ist C ein dicht definierter, surjektiver linearer Operator auf dem Hilbertraum X, so ist C^* injektiv. Sei zum Beweis $y \in D(C^*)$ mit $C^*y = 0$. Dann gilt für alle

$$(x|C^*y) = (Cx|y) = 0$$

für alle $x \in D(C)$. Da $D(C)$ dicht in X liegt, muss bereits $y = 0$ gelten. Also ist C^* in der Tat injektiv.

Deshalb reicht es aus, ein $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zu finden so, dass

$$zI - (A+B) \qquad \text{und} \qquad \overline{z} - (A+B)$$

surjektiv sind. Wir zeigen dies für $z = \mathrm{i}\mu$ für ein $\mu > 0$.

Nach Voraussetzung, existiert ein $0 \leq a < 1$ und ein $b \geq 0$ mit

$$\|Bx\| \leq a\,\|Ax\| + b\,\|x\|$$

für alle $x \in D(A)$. Nach Satz 1.40 (b) der Vorlesung ist $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$. Also ist $\pm\mathrm{i}\mu \in \rho(A)$ und $\|R(\pm\mathrm{i}\mu, A)\| \leq \frac{1}{\mu}$. Ferner ist

$$\begin{aligned}
\|(\pm\mathrm{i}\mu I - A)x\|^2 &= ((\pm\mathrm{i}\mu I - A)x|(\pm\mathrm{i}\mu I - A)x) = |\mu|^2\,\|x\|^2 \mp 2\,\mathrm{Re}\,\mathrm{i}\mu\,\underbrace{(x|Ax)}_{\in\mathbb{R}} + \|Ax\|^2 \\
&= \mu^2\,\|x\|^2 + \|Ax\|^2
\end{aligned}$$

für alle $x \in D(A)$. Sei nun $y \in X$ beliebig. Da $\pm\mathrm{i}\mu \in \rho(A)$ ist, ist $\pm\mathrm{i}\mu I - A$ surjektiv. Also existiert ein $x \in D(A)$ mit $(\pm\mathrm{i}\mu I - A)x = y$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\|BR(\pm\mathrm{i}\mu, A)y\| &\leq a\,\|AR(\mathrm{i}\mu, A)y\| + b\,\|R(\pm\mathrm{i}\mu, A)y\| \\
&\leq a\,\|Ax\| + \frac{b}{\mu}\,\|y\| \leq a\sqrt{\mu^2 + \|Ax\|^2} + \frac{b}{\mu}\,\|y\| \\
&= a\,\|y\| + \frac{b}{\mu}\,\|y\|\,.
\end{aligned}$$

Damit ist $\|BR(\pm\mathrm{i}\mu, A)\| \leq a + \frac{b}{\mu}$ und wegen $a < 1$ ist $\|BR(\pm\mathrm{i}\mu, A)\| < 1$ für hinreichend große μ. Nach Aufgabenteil (a) ist $\pm\mathrm{i}\mu \in \rho(A+B)$ für solche μ und damit $\pm\mathrm{i}\mu I - (A+B)$ surjektiv. $\square$

Aufgabe 27:
Um den ersten Hinweis zu beweisen, reicht es zu zeigen, dass für jedes $a > 0$ ein $b > 0$ existiert derart, dass für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ die Abschätzung

$$\|f\|_\infty \leq a\,\|\Delta f\|_2 + b\,\|f\|_2\,. \tag{3}$$

gilt, denn:

Sei $a > 0$ beliebig und $b > 0$ derart, dass (3) für alle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ gilt. Sei $f \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$ beliebig. Nach Abschnitt 1.41 der Vorlesung ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^3) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ dicht in $W_2^2(\mathbb{R}^3)$. Es existiert deshalb eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ mit $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{W_2^2(\mathbb{R}^3)}} f$ für $n\to\infty$. Wegen $\|f_n - f_m\|_\infty \leq a\,\|\Delta(f_n - f_m)\|_2 + b\,\|f_n - f_m\|_2 \leq (a+b)\,\|f_n - f_m\|_{W_2^2(\mathbb{R}^3)}$ für jedes $n, m \in \mathbb{N}$, ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. Möge sie etwa gegen $g \in C_n(\mathbb{R}^3) \subseteq L^\infty(\mathbb{R}^3)$ konvergieren. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch in $L^2(\mathbb{R}^3)$ gegen f konvergiert, gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Da aber $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen g konvergiert, ist $f = g$ fast überall. Damit ist $f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Mit der Stetigkeit von $\|\cdot\|_\infty$ auf $L^\infty(\mathbb{R}^3)$ bzw. von $\|\Delta\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_2$ auf $W_2^2(\mathbb{R}^3)$, folgt

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n\|_\infty = \|f\|_\infty \leq a\,\|\Delta f\|_2 + b\,\|f\|_2 = \lim_{n\to\infty} \left[a\,\|\Delta f_n\|_2 + b\,\|f_n\|_2\right].$$

□

Sei also $a > 0$ vorgelegt und $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Wir beobachten zunächst, dass für ein beliebiges $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ die Ungleichung

$$\begin{aligned}
\|g\|_\infty &= \left\|\mathcal{F}^{(-1)}\mathcal{F}g\right\|_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^3}\,\|\mathcal{F}g\|_1 = \frac{1}{(2\pi)^3}\left\|\frac{1}{1+\|\cdot\|_2^2}\left(1+\|\cdot\|_2^2\right)\mathcal{F}g\right\|_1 \\
&\overset{\text{CSU}}{\leq} \frac{1}{(2\pi)^3}\left(\underbrace{\left\|\frac{1}{1+\|\cdot\|_2^2}\right\|_2}_{=:C}\left\|\left(1+\|\cdot\|_2^2\right)\mathcal{F}g\right\|_2\right) \overset{\text{Plancherel}}{=} C\left\|\mathcal{F}^{(-1)}\left(1+\|\cdot\|_2^2\right)\mathcal{F}g\right\|_2 \\
&\leq C\left(\|g\|_2 + \|\Delta g\|_2\right)
\end{aligned}$$

gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
C &= \left\|\frac{1}{1+\|\cdot\|_2^2}\right\|_2 = \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3}\left(\frac{1}{1+\|x\|_2^2}\right)^2 \mathrm{d}x} \\
&\overset{\text{Kugelkoordinaten}}{=} \sqrt{\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\frac{1}{(1+r^2)^2}r^2\sin(\vartheta)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\,\mathrm{d}r} = \sqrt{4\pi\int_0^\infty\frac{r^2}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}r} \\
&\leq \sqrt{4\pi\left(1+\int_1^\infty\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r\right)} = \sqrt{4\pi\left(1-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{r^3}\right]_{r=1}^{r=\infty}\right)} \\
&= \sqrt{\frac{16\pi}{3}} < \infty.
\end{aligned}$$

Tatsächlich kann man C mit Hilfe des Residuensatzes exakt berechnen zu $C = \pi$.

Sei nun $\varepsilon > 0$. Wir betrachten die Dilationen $f_\varepsilon := f(\varepsilon\,\cdot)$ von f. Es gelten die folgenden Gleichungen

$$\begin{aligned}
\|f_\varepsilon\|_\infty &= \|f\|_\infty, \\
\|f_\varepsilon\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3}|f(\varepsilon x)|^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^3}\int_{\mathbb{R}^3}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\,\|f\|_2, \\
\|\Delta f_\varepsilon\|_2 &= \sqrt{\int_{\mathbb{R}^3}|\varepsilon^2(\Delta f)(\varepsilon x)|^2\,\mathrm{d}x} = \sqrt{\varepsilon\int_{\mathbb{R}^3}|\Delta f(x)|^2\,\mathrm{d}x} = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\,\|\Delta f\|_2.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\|f\|_\infty = \|f_\varepsilon\|_\infty \leq C(\|\Delta f_\varepsilon\|_2 + \|f_\varepsilon\|_2) = C\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,\|\Delta f\|_2 + \varepsilon^{-\frac{3}{2}}\,\|f\|_2\right) = a\,\|\Delta f\|_2 + b\,\|f\|_2$$

für die Wahl $\varepsilon = \frac{a^2}{C^2} = \frac{a^2}{\pi^2}$ und $b = C\varepsilon^{-\frac{3}{2}} = \frac{\pi^4}{a^3}$ und damit die Behauptung.

(a) Wir zeigen zunächst, dass für jedes $d \in \mathbb{N}$ der Operator $\tilde{A}$ mit $D(\tilde{A}) = W_2^2(\mathbb{R}^d)$ und $\tilde{A}f = \Delta f$ für jedes $f \in D(\tilde{A})$ selbstadjungiert in $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist. Sei dazu $d \in \mathbb{N}$.

Wir bemerken zunächst, dass die Formel der partiellen Integration

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}|g\right) = -\left(f|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) \tag{4}$$

für jedes $j \in \{1, \ldots, d\}$, $f, g \in W_2^1(\mathbb{R}^d)$ gilt, denn:

Seien j, f, g wie oben. Nach Abschnitt 1.40 der Vorlesung ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dicht in $W_2^1(\mathbb{R}^d)$. Es existiert also eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)^\mathbb{N}$ mit $g_n \xrightarrow{n\to\infty} g$ bezüglich $\|\cdot\|_{W_2^1(\mathbb{R}^d)}$. Folglich gilt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}|g\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}|g_n\right) \overset{\text{per Def.}}{=} -\lim_{n\to\infty}\left(f|\frac{\partial g_n}{\partial x_j}\right) = -\left(f|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right).$$

Damit ist $\tilde{A}$ symmetrisch, denn $\tilde{A}$ ist dicht definiert und

$$\left(\tilde{A}f|g\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}|g\right) = -\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}|\frac{\partial g}{\partial x_j}\right) = \sum_{j=1}^{3}\left(f|\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}\right) = \left(f|\tilde{A}g\right)$$

für alle $f, g \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$.

Bleibt $\tilde{A}^* \subseteq \tilde{A}$ zu zeigen. Sei dazu $g \in D(\tilde{A}^*) \subseteq L^2(\mathbb{R}^d)$. Nach der Definition des adjungierten Operators, ist die Abbildung $l_g : L^2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ mit $f \mapsto l_g(f) = \left(f|\tilde{A}^*g\right)$ stetig und für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subseteq W_2^2(\mathbb{R}^d) = D(\tilde{A})$ gilt

$$\begin{aligned} l_g(f) &= \left(f|\tilde{A}^*g\right) = \left(\tilde{A}f|g\right) \overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\mathcal{F}(\tilde{A}f)|\mathcal{F}g\right) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\left(\|\cdot\|_2^2\,\mathcal{F}(f)|\mathcal{F}g\right) \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{F}(f))(\xi)\overline{\|\xi\|_2^2\,(\mathcal{F}(g))(\xi)}\mathrm{d}\xi. \end{aligned}$$

Da die Fouriertransformation eine Bijektion auf $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ und bis auf eine Konstante eine Isometrie auf $L^2(\mathbb{R}^d)$ ist, ist auch die Abbildung $l_g \circ \mathcal{F}^{(-1)} : L^2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ stetig mit

$$l_g \circ \mathcal{F}^{(-1)}(f) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(\xi)\overline{\|\xi\|_2^2\,(\mathcal{F}(g))(\xi)}\mathrm{d}\xi$$

für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nach dem Darstellungssatz von Fréchet-Riesz, existiert ein $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ mit $l_g \circ \mathcal{F}^{(-1)}(f) = (f|h)$ für jedes $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Folglich ist

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left[h(\xi) + \frac{1}{(2\pi)^d}\|\xi\|_2^2\,(\mathcal{F}(g))(\xi)\right]\mathrm{d}\xi = 0$$

für jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Nach dem Lemma von du Bois-Reymond (siehe Aufgabe 15 (a)), ist

$$h(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\|\xi\|_2^2\,(\mathcal{F}(g))(\xi)$$

für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^d$ und insbesondere $\|\cdot\|_2^2\,\mathcal{F}(g) \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Daraus folgt bereits, dass $g \in W_2^2(\mathbb{R}^d) = D(\tilde{A})$ ist, denn:

Sei etwa $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| \le 2$ und $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ beliebig. Die Abbildung $\xi \mapsto \xi^\alpha(\mathcal{F}(g))(\xi)$ ist quadratintegrabel da (vgl. Lösung der Aufgabe 24 (b))

$$|\xi^\alpha| \le \|\xi\|_2^{|\alpha|} \le (1 + \|\xi\|_2^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} \le 1 + \|\xi\|_2^2$$

für jedes $\xi \in \mathbb{R}^d$. Mit Lemma 17 der Übung folgt

$$\begin{aligned}
\langle D^\alpha f|g\rangle &= (D^\alpha f|\overline{g}) \overset{\text{Plancherel}}{=} \frac{1}{(2\pi)^d}(\mathcal{F}(D^\alpha f)|\mathcal{F}(\overline{g})) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\mathrm{i}^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\mathcal{F}(f)|\mathcal{F}(\overline{g})\right) \\
&= \frac{(-1)^{|\alpha|}}{(2\pi)^d}\left(\mathcal{F}(f)|\mathrm{i}^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\mathcal{F}(\overline{g})\right) \overset{\text{Plancherel}}{=} (-1)^{|\alpha|}\left(f|\mathcal{F}^{(-1)}(\mathrm{i}^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\mathcal{F}(\overline{g}))\right) \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left\langle f|\overline{\mathcal{F}^{(-1)}(\mathrm{i}^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\mathcal{F}(\overline{g}))}\right\rangle = (-1)^{|\alpha|}\left\langle f|\mathcal{F}^{(-1)}(\mathrm{i}^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\overline{\mathcal{F}(\overline{g})(-\,\cdot\,)})\right\rangle \\
&= (-1)^{|\alpha|}\left\langle f|\mathcal{F}^{(-1)}((\mathrm{i})^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\mathcal{F}(g))\right\rangle.
\end{aligned}$$

Folglich existiert in der Tat die schwache partielle Ableitung $D^\alpha g$ von g mit $D^\alpha g = \mathcal{F}^{(-1)}(\mathrm{i}^{|\alpha|}(\,\cdot\,)^\alpha\mathcal{F}(g))$.

Mit der obigen Darstellung von $l_g(f)$ folgt

$$l_g(f) = -\frac{1}{(2\pi)^d}\left(f|\,\|\cdot\|_2^2\,\mathcal{F}(g)\right) \overset{\text{Plancherel}}{=} -\left(f|\mathcal{F}^{(-1)}(\|\cdot\|_2^2\,\mathcal{F}(g))\right) = (f|\Delta g) = \left(f|\tilde{A}g\right)$$

für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Da $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dicht ist in $W_2^2(\mathbb{R}^d)$, folgt $\tilde{A}^*g = \tilde{A}g$.

Jetzt kann die Selbstadjungiertheit von $A + B$ gezeigt werden. Nach gerade Gezeigtem ist A selbstadjungiert. Da V reellwertig ist, ist B symmetrisch. Sei $0 < a$ beliebig. Nach dem ersten Hinweis, existiert ein $b > 0$ so, dass

$$\|f\|_\infty \le a\,\|Af\|_2 + b\,\|f\|_2$$

für jedes $f \in W_2^2(\mathbb{R}^3)$ ausfällt. Deshalb gilt

$$\begin{aligned}
\|Bf\|_2 &= \|V_1 + V_2 f\|_2 \le \|V_1 f\|_2 + \|V_2 f\|_2 \le \|V_1\|_\infty\,\|f\|_2 + \|V_2\|_2\,\|f\|_\infty \\
&\le a\,\|V_2\|_\infty\,\|Af\|_2 + (\|V_1\|_\infty + b\,\|V_2\|_2)\,\|f\|_2
\end{aligned}$$

für jedes $f \in W_2^2(\mathbb{R}^d)$. Also ist $D(A) \subseteq D(B)$ und die A-Schranke von B ist 0. Nach Aufgabe 26 (b) ist $A + B$ in der Tat selbstadjungiert. □

(b) Nach Aufgabe 25 (b) ist $-A$ sektoriell vom Typ 0. Nach Folgerung 2.14 der Vorlesung erzeugt also A eine beschränkte analytische Halbgruppe vom Winkel $\frac{\pi}{2}$.

Nach obiger Teilaufgabe ist B A-beschränkt mit A-Schranke 0. Nach Satz 3.4 der Vorlesung, existiert ein $\omega \ge 0$ so, dass $A + B - I\omega$ eine beschränkte analytische Halbgruppe $(T_\omega(\,\cdot\,))$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ erzeugt. Überprüfung der definierenden Eigenschaften liefert, dass $A + B$ die analytische Halbgruppe $T(\,\cdot\,) = e^{\omega\,\cdot}\,T_\omega(\,\cdot\,)$ vom Winkel $\frac{\pi}{2}$ erzeugt. □