Karlsruher Institut für Technologie

Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
06.07.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 12. Übungsblatt

Aufgabe 28:

(a) (i) Es gilt für alle $t \geq 0$ und alle $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$

$$T(t)\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) = (e^{\mathrm{i}kt}x_k)_{k\in\mathbb{N}},$$

denn: Wegen

$$\left\|(e^{\mathrm{i}kt}x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}}\left|e^{\mathrm{i}kt}x_k\right| = \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k| = \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty \qquad \forall t \geq 0$$

ist $(T(t))_{t\geq 0}$ eine Familie stetiger Operatoren auf X. Die Halbgruppeneigenschaft von $(T(\,\cdot\,))_{t\geq 0}$ ist klar. Zeige starke Stetigkeit in $t = 0$. Sei dazu $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$ und $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$, existiert ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|x_k| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $k > k_0$. Da $e^{\mathrm{i}kt} \to 1$ für $t \to 0+$ für alle $k \in \mathbb{N}$, existiert ein $T(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$\max_{k\in\{1,\dots,k_0(\varepsilon)\}}\left|(e^{\mathrm{i}kt}-1)x_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $0 \leq t < T(\varepsilon)$. Folglich ist

$$\left|e^{\mathrm{i}kt}x_k - x_k\right| \leq \begin{cases} \left|(e^{\mathrm{i}kt}-1)x_k\right| & \text{für } k \in \{1,\dots,k_0(\varepsilon)\}, \\ \left(\left|e^{\mathrm{i}kt}\right|+1\right)|x_k| & \text{für } k > k_0(\varepsilon) \end{cases} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq t < T(\varepsilon)$. Damit folgt

$$\|T(t)\left((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right) - (x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty < \varepsilon$$

für alle $0 \leq t < T(\varepsilon)$. Also ist $T(\,\cdot\,)$ tatsächlich eine C_0-Halbgruppe.

Sei B ihr Erzeuger. Zeige $A = B$. Sei dafür zunächst $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(B)$. Da Konvergenz bezüglich der Supremumsnorm die „punktweise" Konvergenz impliziert, gilt

$$[B(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]_n = \lim_{t\to 0+}\frac{e^{\mathrm{i}kt}-1}{t}x_n = \mathrm{i}kx_n$$

für jedes $n \in \mathbb{N}$. Ferner ist $B(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X$. Also ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A)$ und $A(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = B(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Sei nun $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A)$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ und jedes $t > 0$ gilt

$$\left|\frac{e^{\mathrm{i}kt}-1}{t}x_k - \mathrm{i}kx_k\right| = \frac{|x_k|}{t}\left|\int_0^t \mathrm{i}ke^{\mathrm{i}ks}\mathrm{d}s - \mathrm{i}k\right| = \frac{|kx_k|}{t}\left|\int_0^t (e^{\mathrm{i}ks}-1)\mathrm{d}s\right|.$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A)$, existiert ein $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $|kx_k| < \frac{\varepsilon}{4}$ für alle $k > k_0$. Da $e^{\mathrm{i}ks} \to 1$ für $t \to 0+$ für alle $k \in \mathbb{N}$, existiert ein $T(\varepsilon) > 0$ so, dass

$$\max_{k\in\{1,\dots,k_0(\varepsilon)\}}\left|(e^{\mathrm{i}ks}-1)kx_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $0 \leq s \leq t < T(\varepsilon)$. Folglich ist

$$\frac{|kx_k|}{t}\left|\int_0^t (e^{\mathrm{i}ks}-1)\mathrm{d}s\right| \leq \begin{cases} |kx_k|\,\frac{1}{t}\int_0^t \left|e^{\mathrm{i}ks}-1\right|\mathrm{d}s & \text{für } k \in \{1,\ldots,k_0(\varepsilon)\}\,, \\ |kx_k|\,\frac{1}{t}\int_0^t 2\mathrm{d}s & \text{für } k > k_0(\varepsilon) \end{cases} < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq t < T(\varepsilon)$. Damit folgt $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(B)$ und $B(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\mathrm{i}kx_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(ii) Nach letztem Aufgabenteil erzeugt A die C_0-Halbgruppe $T(\,\cdot\,)$. Für jedes $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und jedes $t \geq 0$ ist $\|T(t)(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\| = \left\|(e^{\mathrm{i}kt}x_k)_{k\in\mathbb{N}}\right\| = \|(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\|$. Also gilt $\|T(t)\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Klar: $\|B_n\| = n$. Nach Satz 3.1 der Vorlesung (Dyson-Phillips), erzeugt A_n die C_0-Halbgruppe $T_n(\,\cdot\,)$ mit $\|T_n(t)\| \leq 1 \cdot e^{0+nt}$ für alle $t \geq 0$.

Betrachte $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$. Dann ist $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A_n)$, $\|(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\| = 1$ und $T_n(t) = e^{(\mathrm{i}+1)nt}(\delta_{nk})_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $t \geq 0$ (Satz 1.11 der Vorlesung). Folglich ist $\|T_n(t)\| \geq \|T_n(t)(y_k)_{k\in\mathbb{N}}\| = e^{nt}$ für alle $t \geq 0$. Insgesamt also tatsächlich $\|T_n(t)\| = e^{nt}$ für alle $t \geq 0$.

(iii) Sei $t > 0$ beliebig. Angenommen, $(T_n(t)x)_{n\in\mathbb{N}}$ wäre konvergent, und damit beschränkt, für jedes $x \in X$. Nach dem Satz von Banach-Steinhaus (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit), wäre $(\|T_n\|)_{n\in\mathbb{N}} = (e^{nt})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt. Da dies nicht der Fall ist, muss die Annahme verworfen werden.

(iv) Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in D(A)$. Dann ist in der Tat

$$\|A_n(x_k)_{k\in\mathbb{N}} - A(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\| = \|B_n(x_k)_{k\in\mathbb{N}}\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\delta_{kn}kx_k| = |nx_n| \to 0$$

für $n \to \infty$.

Verletzt ist die Voraussetzung

$$\|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

für feste $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$.

(b) (i) Sei $n \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}\lambda > 0$ und $y \in X$ beliebig. Dann gilt für jedes $x \in X$

$$\begin{aligned} (\lambda I - A_n)x &= y \\ \Leftrightarrow \underbrace{(\lambda + n)}_{\neq 0}x &= y \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{\lambda + n}y. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\left\|\frac{1}{\lambda+n}y\right\| = \|y\|\,\frac{1}{|\lambda+n|} \leq \|y\|\,\frac{1}{|\mathrm{Re}(\lambda+n)|} \leq \|y\|\,\frac{1}{n}.$$

Also ist $\lambda \in \rho(A_n)$ und $R(\lambda, A_n)y = \frac{y}{\lambda+n}$ für jedes $y \in X$.

(ii) Nach Obigem gilt $\|A_n\| \to R = 0$ für $n \to \infty$. Insbesondere konvergiert $(A_n)_{n\to\infty}$ stark gegen R.

(iii) Es ist $T_n(t)x = e^{-nt}x \to 0 = T(t)x$ für alle $x \in X$ und alle $t > 0$. Wegen $T(0)x = x$ für alle $x \in X \neq \{0\}$, kann $T(\,\cdot\,)$ nicht stark stetig in $t = 0$ sein.

Verletzt ist die Bedingung $\operatorname{Bild} R = \{0\}$ ist dicht in X.

Aufgabe 29:

(a) Behauptung: jedes $f \in X$ ist gleichmäßig stetig. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, existiert ein $R = R(\varepsilon) > 0$ mit $|f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $|x| \ge R$. Da $I := [-R, R] \subseteq \mathbb{R}$ kompakt ist, ist f gleichmäßig stetig auf I. Es existiert also ein $\delta = \delta(\varepsilon)$ derart, dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $x, y \in I$ mit $|x - y| < \delta$. Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \le y$ und $|x - y| < \delta$. Dann gilt in der Tat

$$|f(x) - f(y)| \le \begin{cases} \frac{\varepsilon}{3} & \text{falls } x, y \in I, \\ |f(x)| + |f(y)| & \text{falls } x, y \notin I, \\ |f(x) - f(-R)| + |f(-R) - f(y)| & \text{falls } x < -R \le y \le R, \\ |f(x) - f(R)| + |f(R) - f(y)| & \text{falls } -R \le x \le R < y \end{cases}$$
$$\le \begin{cases} \frac{\varepsilon}{3} & \text{falls } x, y \in I, \\ \frac{2\varepsilon}{3} & \text{falls } x, y \notin I, \\ |f(x)| + |f(-R)| + |f(-R) - f(y)| & \text{falls } x < -R \le y \le R, \\ \le |f(x)| + |f(R)| + |f(R) - f(y)| & \text{falls } -R \le x \le R < y \end{cases} < \varepsilon.$$

Die Halbgruppeneigenschaft von $(T(t))_{t\ge 0}$ ist klar. Zeige starke Stetigkeit in $t = 0$: Sei dazu $f \in X$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Nach Obigem ist f gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. Folglich existiert ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $0 \le t < \delta$ und alle $s \in \mathbb{R}$

$$|(T(t)f)(s) - f(s)| = |f(t + s) - f(s)| < \varepsilon$$

gilt. Insbesondere ist $\|T(t)f - f\|_\infty \le \varepsilon$ für alle $0 \le t < \delta$. Also ist in der Tat $\lim_{t\to 0+} T(t)f = f$ in X für jedes $f \in X$.

Sei B der Erzeuger von $(T(t))_{t\ge 0}$. Zeige $A = B$:

- „$\subseteq$": Sei $f \in D(A)$. Zeige $f \in D(B)$ und $Bf = Af$. Nach Obigem ist $Af = f' \in X$ gleichmäßig stetig. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ derart, dass $|f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $|x - y| < \delta$. Folglich gilt für alle $0 < t < \delta$ und alle $s \in \mathbb{R}$

$$\left| \left(\frac{(T(t)f) - f}{t} - f' \right)(s) \right| = \frac{1}{t} \left| \int_0^t f'(s + \tau) - f'(s) \mathrm{d}\tau \right| \le \frac{\varepsilon}{t} \int_0^t 1 \mathrm{d}\tau = \varepsilon$$

  Also ist in der Tat $f \in D(B)$ und $Bf = f' = Af$.

- „$\supseteq$": Sei $f \in D(B)$. Zeige $f \in D(A)$ und $Af = Bf$. Da der Grenzwert $\lim_{t\to 0+} \frac{T(t)f - f}{t}$ in X, also gleichmäßig in der s-Variablen, existiert, existiert er erst recht punktweise

$$\lim_{t\to 0+} \left(\frac{T(t)f - f}{t} \right)(s) = \lim_{t\to 0+} \frac{f(t + s) - f(s)}{t} \qquad \forall s \in \mathbb{R}.$$

  Also ist f rechtsseitig differenzierbar mit $f'_+ \in X$. Bleibt zu zeigen, dass f linksseitig differenzierbar ist $f'_- = f'_+$. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Da f'_+ gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta' > 0$ derart, dass $\left|f'_+(t) - f'_+(s)\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $t, s \in \mathbb{R}$ mit $|t - s| < \delta'$. Wegen $\lim_{t\to 0+} \frac{T(t)f - f}{t} = f'_+$ in X, existiert ein $\delta'' > 0$ mit $\left\| \frac{T(t)f - f}{t} - f'_+ \right\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle

$0 < t < \delta''$. Folglich gilt für alle $s \in \mathbb{R}$ und alle $0 < t < \delta := \min\{\delta', \delta''\}$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f(s-t)-f(s)}{-t} - f'_+(s)\right| &= \left|\frac{f(s)-f(s-t)}{t} - f'_+(s)\right| \\
&\leq \left|\frac{f(s)-f(s-t)}{t} - f'_+(s-t)\right| + \left|f'_+(s-t) - f'_+(s)\right| \\
&= \left|\frac{T(t)f-f}{t}(s-t) - f'_+(s-t)\right| + \left|f'_+(s-t) - f'_+(s)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Also gilt in der Tat $f \in D(A)$ und $Af = f' = Bf$.

Klar: $(T(t))_{t\geq 0}$ ist isometrisch. $\square$

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Klar: $A_n \in \mathcal{L}(X)$. Folglich erzeugt A_n die C_0-Halbgruppe $(e^{tA_n})_{t\geq 0}$. Für jedes $t \geq 0$ gilt

$$\left\|e^{tA_n}\right\| = \left\|e^{tn\left(T\left(\frac{1}{n}\right)-I\right)}\right\| = \left\|e^{-tnI}e^{ntT\left(\frac{1}{n}\right)}\right\| \leq e^{-nt}e^{nt\overbrace{\left\|T\left(\frac{1}{n}\right)\right\|}^{=1}} = 1.$$

Also ist $(T_n(t))_{t\geq 0}$ in der Tat kontraktiv.

(c) Wir versuchen die Voraussetzung $(\tilde{a})$ des Satzes 3.5 (Trotter-Kato I) der Vorlesung nachzurechnen: Die Stabilitätsabschätzungen folgen aus Teilaufgaben (a) und (b). Da $A_n \in \mathcal{L}(X)$, gilt für den wesentlichen Definitionsbereich $D := D(A)$ von A, dass $D \subseteq D(A_n) = X$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Die Konsistenzbedingung $(\tilde{a})$ folgt schließlich, da nach Definition von A für jedes $f \in D$

$$\lim_{n\to\infty} A_n f = \lim_{n\to\infty} \frac{T\left(\frac{1}{n}\right)f - f}{\frac{1}{n}} = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)f-f}{t} = Af$$

gilt.

Mit dem Satz von Trotter-Kato I — Aussage (c) — folgt die Behauptung.

(d) Nach der vorhergehenden Teilaufgabe existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\|T(t)f - T_n(t)f\| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $0 \leq t \leq b$.

Der Konvergenzradius der Potenzreihe

$$T_n(t)f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left(n\left(T\left(\frac{1}{n}\right) - I\right)\right)^k f$$

ist unendlich. Daher konvergiert sie auf $[0, b]$ gleichmäßig und absolut. Es existiert also ein $K \in \mathbb{N}$ mit

$$\left\|\sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\left(n\left(T\left(\frac{1}{n}\right) - I\right)\right)^k f\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

für alle $0 \leq t \leq b$.

Setze

$$p(t) := \sum_{k=0}^{K} \frac{t^k}{k!} \underbrace{\left(\left(n\left(T\left(\frac{1}{n}\right) - I\right)\right)^k f\right)(0)}_{=:a_k} \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Klar: p ist Polynom. Für jedes $t \in [0,b]$ gilt

$$\begin{aligned}
|f(t) - p(t)| &\leq |f(t) - T_n(t)f(0)| + |T_n(f)(0) - p(t)| \\
&= |(T(t)f)(0) - T_n(t)f(0)| + \left| \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \left(T\left(\frac{1}{n} - I\right)\right)^k f \right)(0) \right| \\
&\leq \|T(t)f - T_n(t)f\| + \left\| \sum_{k=K+1}^{\infty} \left(\frac{t^k}{k!} \left(T\left(\frac{1}{n} - I\right)\right)^k f \right) \right\| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich ist wie gefordert $\sup_{t\in[0,b]} \|f(t) - p(t)\| \leq \varepsilon$. □