Institut für Analysis
PD Dr. Peer Christian Kunstmann
Dipl.-Math. Leonid Chaichenets

SS 2015
13.07.2015

Evolutionsgleichungen

Lösungsvorschläge zum 13. Übungsblatt

Aufgabe 30:
Wir versuchen die Voraussetzungen der Folgerung 3.12 (Lie-Trotter-Produktformel) nachzurechnen.

Nach Bemerkung im Abschnitt 1.5 der Vorlesung existieren Konstanten $M \geq 1$ und $\omega \in \mathbb{R}$ mit $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für alle $t \geq 0$. Wir statten X mit der Norm

$$|||x||| = \sup_{t \geq 0} \left\| e^{-\omega t} T(t) x \right\| \qquad \forall x \in X$$

aus. Nach Bemerkung im Abschnitt 1.17 sind $|||\cdot|||$ und $\|\cdot\|$ äquivalent und

$$|||T(t)x||| \leq e^{\omega t} |||x||| \qquad \forall x \in X.$$

Ohne Verwechslungen zu befürchten, bezeichnen wir die durch $|||\cdot|||$-Norm induzierte Operatornorm ebenfalls mit $|||\cdot|||$. Dann ist $|||T(t)||| \leq e^{\omega t}$ für jedes $t \geq 0$.

Nach Satz 1.15 der Vorlesung gilt $\{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} \lambda > \omega\} \subseteq \rho(A)$ und

$$|||R(\lambda, A)||| \leq \frac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} \lambda > \omega$. Folglich existiert ein $\lambda_0 \in \rho(A)$ mit

$$|||BR(\lambda_0, A)||| \leq |||B||| |||R(\lambda_0, A)||| < 1.$$

Nach Aufgabe 26 (a) (Übungsblatt 11) ist $A + B$ mit $D(A + B) = D(A) =: D$ abgeschlossen und $\lambda_0 \in \rho(A + B)$. Folglich ist

$$(\lambda_0 I - (A + B))D = R(\lambda_0, A + B)^{(-1)} D = X$$

dicht in X.

Für die Stabilitätsabschätzung in 3.12 bemerken wir, dass

$$\begin{aligned} \left|\left|\left| \left(T\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}B} \right)^n \right|\right|\right| &\leq \left|\left|\left| T\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}B} \right|\right|\right|^n \leq \left|\left|\left| T\left(\frac{t}{n}\right) \right|\right|\right|^n \left|\left|\left| e^{\frac{t}{n}B} \right|\right|\right|^n \\ &\leq \left(e^{\frac{t}{n}\omega} \right)^n \left(e^{\frac{t}{n}|||B|||} \right)^n = e^{(\omega + |||B|||)t} \end{aligned}$$

für alle $t \geq 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Nach der Lie-Trotter-Produktformel erzeugt $\overline{A + B} = A + B$ die C_0-Halbgruppe $(S(t))_{t \geq 0}$ mit

$$S(t)x = \lim_{n \to \infty} \left[T\left(\frac{t}{n}\right) e^{\frac{t}{n}B} \right]^n x \qquad \forall x \in X, \forall t \geq 0$$

in $(X, |||\cdot|||)$. Wegen der Äquivalenz der Normen $\|\cdot\|$ und $|||\cdot|||$ ist $(S(t))_{t\geq 0}$ auch eine C_0-Halbgruppe in $(X, \|\cdot\|)$. $\square$

Aufgabe 31:

Es ist

$$\omega_0(T) = \inf \underbrace{\left\{\omega \in \mathbb{R} | \exists M \geq 1 : \forall t \geq 0 : \|T(t)\| \leq Me^{\omega t}\right\}}_{=:\mathcal{M}_1}.$$

Zeige zunächst

$$\omega_0(T) = \inf \underbrace{\left\{\omega \in \mathbb{R} | (e^{-\omega t}T(t))_{t\geq 0} \text{ exp. stabil}\right\}}_{=:\mathcal{M}_2}.$$

Sei dazu zunächst $\omega \in \mathcal{M}_1$ und $\delta > 0$ beliebig. Es existiert nach Definition ein $M \geq 1$ derart, dass $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ für jedes $t \geq 0$. Dann ist aber

$$\left\|e^{-(\omega+\delta)t}T(t)\right\| \leq Me^{-\delta t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Folglich ist $\left(e^{-(\delta+\omega)}T(t)\right)_{t\geq 0}$ exponentiell stabil, also $\omega+\delta \in \mathcal{M}_2$. Damit ist $\inf \mathcal{M}_1 \leq \inf \mathcal{M}_2$.

Sei nun umgekehrt $\omega \in \mathcal{M}_2$. Dann existiert ein $M \geq 0$ und $\delta > 0$ derart, dass $\left\|e^{-\omega t}T(t)\right\| \leq Me^{-\delta t}$ für alle $t \geq 0$. Dann ist aber

$$\|T(t)\| \leq Me^{(\omega-\delta)t} \leq Me^{\omega t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Folglich ist $\omega \in \mathcal{M}_1$. Damit ist $\inf \mathcal{M}_2 \leq \inf \mathcal{M}_1$.

Sei schließlich

$$\mathcal{M}_3 := \left\{\lambda > s(A) | \sup_{\operatorname{Re}\mu > \lambda} \|R(\mu, A)\| < \infty\right\}.$$

Zeige $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_3$ (dann $\inf \mathcal{M}_2 = \inf \mathcal{M}_3$). Nach dem Satz 4.7 der Vorlesung (Gearhart) gilt in der Tat

$$\begin{aligned}
\omega \in \mathcal{M}_2 \quad &\Leftrightarrow \quad (e^{-\omega t}T(t))_{t\geq 0} \text{ exp. stabil} \\
&\Leftrightarrow \quad s(A - \omega I) < 0 \wedge \sup_{\operatorname{Re}\mu > 0} \|R(\mu, A - \omega I)\| < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad s(A) < \omega \wedge \sup_{\operatorname{Re}\mu > 0} \|R(\mu + \omega, A)\| < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad s(A) < \omega \wedge \sup_{\operatorname{Re}\mu > \omega} \|R(\mu, A)\| < \infty \\
&\Leftrightarrow \quad \omega \in \mathcal{M}_3.
\end{aligned}$$