

## Funktionentheorie I – Übungsblatt 1

### Aufgabe 1K (10 Punkte)

Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Zahlenebene:

- (a)  $M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z - i - 1| < 3\}$ .
- (b)  $M_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 6\}$ .
- (c)  $M_3 := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \frac{z-z_1}{z-z_2} = 0\right\}$  mit  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .
- (d)  $M_4 := \{z \in \mathbb{C} : (1-i) \cdot z^2 - (7+7i) \cdot z - (28-10i) = 0\}$ .
- (e)  $M_5 := \{z \in \mathbb{C} : |z-1| < |z+1|\}$ .

### Aufgabe 2K (10 Punkte)

- (a) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil sowie den Betrag der folgenden komplexen Zahlen:

$$\begin{aligned} z_1 &:= (\sqrt{2} + i)^2, & z_2 &:= \frac{1}{-2-\sqrt{3}i}, & z_3 &:= \frac{3+i}{-2-\sqrt{3}i}, \\ z_4 &:= \left(\frac{3+2i}{3-2i}\right)^2, & z_5 &:= \frac{(1+i)^4}{(1-i)^3} - \frac{(1-i)^4}{(1+i)^3}, & z_6 &:= \sum_{k=0}^7 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^k. \end{aligned}$$

- (b) Es sei  $t \in (0, 2\pi)$ . Bestimmen Sie die Polarkoordinaten von  $z(t) := 1 - e^{it}$ .

### Aufgabe 3 (mündlich)

- (a) Zeigen Sie, dass die Summe aller  $n$ -ten Einheitswurzeln (für festes  $n > 1$ ) Null ist.
- (b) Berechnen Sie für festes  $n > 1$  das Produkt aller  $n$ -ten Einheitswurzeln.

### Aufgabe 4 (mündlich)

- (a) Sei  $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$  die obere Halbebene.  
Zeigen Sie:

$$z \in \mathbb{H} \iff -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}.$$

- (b) Seien  $z, w \in \mathbb{C}$ . Zeigen Sie:  $|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$ .  
Folgern Sie daraus: Ist  $|w| < 1$ , so gilt

$$|z| < 1 \iff \left| \frac{z-w}{1-z\bar{w}} \right| < 1.$$

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 25.04.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.

---

## Hinweise zum Übungsbetrieb

- Die Übungsblätter erscheinen wöchentlich mittwochs.
  - Auf jedem Übungsblatt sind zwei Aufgaben mit einem „K“ gekennzeichnet. Diese können Sie zur Korrektur abgeben.
  - Sie können Ihre Bearbeitungen in den dafür vorgesehenen Kasten neben Zimmer 308 einwerfen oder zu Beginn der Übungen abgeben.
  - Die korrigierten Übungsblätter finden Sie in einem Kasten neben der Treppe gegenüber von Raum 311.
  - Bei jeder K-Aufgabe können Sie 10 Punkte erreichen.
  - Einen Übungsschein erhalten alle, die die Hälfte der maximal erreichbaren Punkte erzielt haben.
  - Der Übungsschein wird benotet.
  - Aktuelle Informationen sowie das jeweils aktuelle Übungsblatt finden sich auch im Internet unter  
<http://www.mathematik.uni-karlsruhe.de/mi1schneider/lehre/ft12007s>.
-