

Funktionentheorie I – Übungsblatt 10

Aufgabe 1K (10 Punkte)

Es sei Δ ein abgeschlossenes Dreieck in \mathbb{C} mit den Ecken a, b und c , sodass gilt $|a - b| = |b - c| = |c - a|$. Zeigen Sie:

$$\max \{|z - a| \cdot |z - b| \cdot |z - c| : z \in \Delta\} = \frac{\sqrt{3}}{8} |a - b|^3.$$

Aufgabe 2K (10 Punkte)

Es bezeichne $z \mapsto \text{Log}(z)$ den Hauptzweig des Logarithmus. Ausdrücke der Form z^w sind mit dem Hauptzweig des Logarithmus definiert.

(a) Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$(1 + i)^i, \quad i^{1/i}, \quad (\text{Log}(i))^i, \quad (i^i)^i.$$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie, dass für alle $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $a, b \neq 0$ gilt:

(i) $a^{c+d} = a^c a^d$.

(ii) $\text{Log}(ab) = \text{Log}(a) + \text{Log}(b)$.

(iii) $\text{Log}(a^c) = c \text{Log}(a)$.

(c) Es sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $r > 0$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^{1/z} = w$ unendlich viele Lösungen z mit $|z| < r$ besitzt.

Aufgabe 3 (mündlich)

Es bezeichne $z \mapsto \log(z)$ die mengenwertige Logarithmusfunktion

$$\log(z) := \{w \in \mathbb{C} : e^w = z\}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

$$\log(z_1 z_2) = \log(z_1) + \log(z_2) \quad \text{und} \quad \log\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \log(z_1) - \log(z_2).$$

Aufgabe 4 (mündlich)

Es sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$. Zeigen Sie:

$$(a) \quad \text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}.$$

$$(b) \quad \frac{1}{2}(\text{Log}(1-z))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{n+1} z^{n+1}.$$

Dabei seien $s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ ($n \in \mathbb{N}$) und $z \mapsto \text{Log}(z)$ der Hauptzweig des Logarithmus.

Studienbegleitende Prüfung

- Die studienbegleitende Prüfung zur Vorlesung Funktionentheorie 1 findet als Klausur statt.
- **Termin:** Montag, 6. August 2007, 10-12 Uhr, im Hertz-Hörsaal.
- **Anmeldung:** Bitte melden Sie sich im Zeitraum vom 9. bis 21. Juli 2007 im Sekretariat in Zimmer 312 an (Sprechzeiten 9.30-11.30 Uhr!), wenn Sie an der Klausur teilnehmen wollen. Bringen Sie zur Anmeldung eine Kopie Ihrer Prüfungsberechtigung mit. Nach dem 21. Juli 2007 werden keine Anmeldungen mehr entgegengenommen.

Abgabe: Bis Mittwoch, 27.6.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.