Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

27.6.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 11

Aufgabe 1K (10 Punkte)

Berechnen Sie die Laurent-Entwicklung der folgenden Funktionen in den angegebenen Gebieten.

(a) $f_1(z) := \dfrac{3}{(z+1)(z-2)}$ im Kreisring $1 < |z| < 2$.

(b) $f_2(z) := \dfrac{1}{z(z-3)^2}$ im Kreisring $1 < |z-1| < 2$.

Aufgabe 2 (mündlich)

Bestimmen Sie jeweils Art und Lage sämtlicher isolierter Singularitäten der folgenden Funktionen.

$$f_1(z) := \frac{z}{z^2 - z - 12}, \qquad f_2(z) := \frac{1}{(z^2+4)^2},$$

$$f_3(z) := \frac{\sin(z) - z}{z^3}, \qquad f_4(z) := \frac{e^{1/z}}{(z-1)^2}.$$

Aufgabe 3K (10 Punkte)

(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $0 \in U$ und $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: f hat in 0 genau dann eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität), wenn f^2 in 0 eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität) hat.

(b) Die Funktion $f : K(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ $(r > 0)$ sei holomorph und habe in $z_0 \in \mathbb{C}$ eine nicht hebbare Singularität. Zeigen Sie, dass e^f in z_0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 4 (mündlich)

Zeigen Sie: Eine ganze Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann transzendent (d.h. kein Polynom), wenn die Funktion $\hat{f} : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto f\left(\frac{1}{z}\right)$ in $z_0 = 0$ eine wesentliche Singularität hat.

Abgabe: Bis Mittwoch, 4.7.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.