Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

4.7.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 12

Aufgabe 1 (mündlich)

Sei γ eine geschlossene stückweise glatte Kurve in $\mathbb{C}$.

(a) Es seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$ durch einen Weg in $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ verbindbar. Zeigen Sie

$$\mathrm{Ind}_\gamma(a) = \mathrm{Ind}_\gamma(b).$$

(b) Es seien $\mathrm{Int}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_\gamma(z) \neq 0\}$ und $\mathrm{Ext}(\gamma) := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0\}$ das Innere bzw. Äußere von γ. Zeigen Sie: $\mathrm{Int}(\gamma)$ ist beschränkt und $\mathrm{Ext}(\gamma)$ ist unbeschränkt.

Aufgabe 2K (10 Punkte)

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet, $a \in G$, $G_a := G \setminus \{a\}$ und $f : G_a \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie: f besitzt auf G_a genau dann eine Stammfunktion F, wenn $\mathrm{Res}_{z=a}(f) = 0$.

Aufgabe 3K (10 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $z_0 \in G$ ein einfacher Pol einer holomorphen Funktion $f : G \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$. Weiter seien $0 \leq \alpha < \beta$ und $\gamma_r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $\gamma_r(t) := z_0 + re^{it}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} f(z)dz = (\beta - \alpha)i \cdot \mathrm{Res}_{z=z_0}(f).$$

Aufgabe 4 (mündlich)

Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale mit Hilfe des Residuensatzes:

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos(z)}{z^2+1} dz, \qquad \int_{|z|=1} \frac{z}{e^{iz}-1} dz,$$

$$\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{z}{1-z}\right) dz, \qquad \int_{\gamma} \frac{z}{\cosh(z)-1} dz.$$

Dabei sei γ der positiv orientierte Rand von $G := \{x + iy : y^2 < (4\pi^2 - 1)(1 - x^2)\}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 11.7.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.