Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer 11.7.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 13

Aufgabe 1K (10 Punkte)

Nochmal die Aufgabe 3 von Blatt 11.

(a) Es sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $0 \in U$ und $f : U \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie: f hat in 0 genau dann eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität), wenn f^2 in 0 eine hebbare Singularität (bzw. einen Pol bzw. eine wesentliche Singularität) hat.

(b) Die Funktion $f : K(z_0, r) \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ $(r > 0)$ sei holomorph und habe in $z_0 \in \mathbb{C}$ eine nicht hebbare Singularität. Zeigen Sie, dass e^f in z_0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 2 (mündlich)

Berechnen Sie die folgenden uneigentlichen Integrale:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+6x^2+5}dx, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a+bx^2)^n}dx.$$

Dabei seien $a, b > 0$, $n \geq 1$.

Aufgabe 3K (10 Punkte)

Sei f holomorph auf $\mathbb{C}$ bis auf endlich viele isolierte Singularitäten, die nicht auf der reellen Achse liegen, außerdem gelte $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$. Zeigen Sie, dass dann für jedes reelle $\alpha > 0$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} w > 0} \operatorname{Res}_{z=w}(f(z)e^{i\alpha z}).$$

Aufgabe 4 (mündlich)

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen von $p(z) = z^8 - 5z^5 - 2z + 1$ in $\mathbb{D}$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 18.7.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.

Viel Erfolg bei der Klausur und alles Gute fürs weitere Studium !