Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

25.4.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 2

Aufgabe 1K (10 Punkte)

(a) Skizzieren Sie den verallgemeinerten Kreis, der durch die Gleichung $2z\bar{z}+iz-i\bar{z}=0$ dargestellt wird.

(b) Geben Sie eine verallgemeinerte Kreisgleichung für den Kreis um den Punkt $1+i$ mit Radius 3 an.

(c) Bestimmen Sie eine verallgemeinerte Kreisgleichung für die Gerade durch die zwei Punkte -1 und $2i$.

Aufgabe 2K (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie, ob es eine Möbiustransformation T gibt, die den Bedingungen $T(1)=i$, $T(i)=1$, $T(0)=\infty$ und $T(3i)=0$ genügt.

(b) Bestimmen Sie die Möbiustransformation S, für die gilt:

$$S(i)=-1\,,\quad S(0)=-i\,,\quad S(-i)=1\,.$$

(c) Bestimmen Sie das Bild der imaginären Achse, des Einheitskreises sowie des Kreises $|z-\frac{i}{2}|=\frac{1}{2}$ unter S.

Aufgabe 3 (mündlich)

Gegeben seien $K_1 := \{z\in\mathbb{C} : |z|=1\}$ und $K_2 := \{z\in\mathbb{C} : |z-i+1|=1\}$. Bestimmen Sie eine Möbiustransformation S derart, dass $S(K_1)=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ und $S(K_2)=i\cdot\mathbb{R}\cup\{\infty\}$.

Aufgabe 4 (mündlich)

Zeigen Sie: Die Möbiustransformation $S: z\mapsto \frac{z-i}{z+i}$ bildet die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{z\in\mathbb{C} : \operatorname{Im}(z)>0\}$ bijektiv auf die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z\in\mathbb{C} : |z|<1\}$ ab.

Abgabe: Bis Mittwoch, 2.5.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.