Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

2.5.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 3

Aufgabe 1K (10 Punkte)

Geben Sie eine Möbiustransformation an, welche den verallgemeinerten Kreisring

$$G := \{z \in \mathbb{C} : |z-8| < 16,\ |z-3| > 9\}$$

auf einen Kreisring der Form $\{w \in \mathbb{C} : \delta < |w| < 1\}$ abbildet. Wie muss δ gewählt werden?

Aufgabe 2 (mündlich)

Beweisen Sie, dass jede Möbiustransformation S, die von der Form

$$S(z) = e^{it} \cdot \frac{z-a}{z+\bar{a}} \qquad (t \in \mathbb{R},\ a \in \mathbb{C} \text{ mit } \operatorname{Re}(a) < 0)$$

ist, die linke Halbebene auf die Einheitskreisscheibe abbildet, und dass sich umgekehrt auch jedes S mit diesem Abbildungsverhalten in obiger Form darstellen lässt.

Aufgabe 3 (mündlich)

Die komplexen hyperbolischen Funktionen sinh und cosh werden in Analogie zum Reellen definiert: Für $z \in \mathbb{C}$ sei

$$\cosh(z) := \frac{e^z + e^{-z}}{2} \text{ und } \sinh(z) := \frac{e^z - e^{-z}}{2}.$$

Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

(a) $\sinh(z) = -i\sin(iz)$, $\cosh(z) = \cos(iz)$.

(b) $\sinh(z+w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w)$,
$\cosh(z+w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$.

(c) $\cosh^2(z) - \sinh^2(z) = 1$.

(d) sinh und cosh haben die Periode $2\pi i$.

Aufgabe 4K (10 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{5+i}{4-2i}\right)^n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2i}\right)^n \left(1+\frac{i}{n}\right)^{n^2}, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i^k}{k}.$$

(b) Zeigen Sie, dass $|\sin^2(z)| = \sin^2(\operatorname{Re} z) + \sinh^2(\operatorname{Im} z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt, und finden Sie dann ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\sin(in)| > 42$.

Abgabe: Bis Mittwoch, 9.5.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.