Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

9.5.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 4

Aufgabe 1K (10 Punkte)

In welchen Punkten sind die folgenden Funktionen reell differenzierbar? Wo erfüllen sie die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen? In welchen Punkten sind sie komplex differenzierbar? Geben Sie dort, wo sie existiert, die Ableitung f' an.

$$\mathrm{f}_1(z) := z\,\mathrm{Re}(z), \qquad \mathrm{f}_2(x+iy) := \sin(x)\sin(y) - i\cos(x)\cos(y),$$

$$\mathrm{f}_3(z) := z/\bar{z} + \bar{z}/z \,(\text{für } z \neq 0), \qquad \mathrm{f}_4(z) := \begin{cases} \exp(\frac{-1}{z^4}) & \text{für } z \neq 0 \\ 0 & \text{für } z = 0. \end{cases}$$

Aufgabe 2K (10 Punkte)

Die Funktion $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) f ist konstant in G.

(b) $|f|$ ist konstant in G.

(c) $\bar{f}$ ist holomorph in G.

Aufgabe 3 (mündlich)

Zeigen Sie, dass es keine stetige Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z)^2 = z$ gibt.

Aufgabe 4 (mündlich)

(a) Für welches $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$u(x, y) := x^4 + y^4 + \lambda x^2 y^2$$

der Realteil einer holomorphen Funktion?
Bestimmen Sie für dieses λ sämtliche holomorphen Funktionen, die u als Realteil haben.

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : G \to \mathbb{C}$ sei holomorph. Beweisen Sie, dass die durch

$$f^*(z) := \overline{f(\overline{z})}, \qquad z \in G^* := \{z \in \mathbb{C} \,:\, \overline{z} \in G\}$$

definierte Funktion $f^* : G^* \to \mathbb{C}$ ebenfalls holomorph ist.

Abgabe: Bis Mittwoch, 16.5.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.