Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

16.5.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 5

Aufgabe 1K (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1+ni)^n z^n, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\binom{kn}{n} z^n \ (k \in \mathbb{N}), \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{\sqrt[n]{n!}}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\sin(n) z^n.$$

(b) Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in Potenzreihen um z_0 und bestimmen Sie deren Konvergenzradien.

$$f_1(z) := \frac{1}{z^2-5z+6} \text{ mit } z_0 = 0 \qquad \text{und} \qquad f_2(z) := \frac{1}{(z-i)^3} \text{ mit } z_0 = -i.$$

Aufgabe 2K (10 Punkte)

Es sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe komplexer Zahlen. Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ sei $c_n := \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergiert und dass gilt:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

Aufgabe 3 (mündlich)

Beweisen Sie, dass die Potenzreihe

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$$

den Konvergenzradius 1 hat, und dass $\lim\limits_{r \to 1-} |f(re^{2k\pi i/2^p})| = \infty$ für alle $k, p \in \mathbb{N}$ gilt.

Aufgabe 4 (mündlich)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Es sei eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z_n) \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} z_n^2 \text{ konvergieren} \implies \sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2 \text{ konvergiert.}$$

(b) Ist $n \geq 2$, so ergibt sich für die n-ten Einheitswurzeln $w_k := e^{2k\pi i/n}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-w_k} = \frac{n-1}{2}.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, 23.5.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.