

## Funktionentheorie I – Übungsblatt 6

### Aufgabe 1K (10 Punkte)

(a) Skizzieren Sie den folgenden Weg und berechnen Sie die Weglänge:

$$\gamma(t) := \begin{cases} i + t(-1 - i), & 0 \leq t < 1 \\ -1 - i(t - 1), & 1 \leq t < 2 \\ -1 + e^{4\pi i(t-2) - i\frac{\pi}{2}}, & 2 \leq t < 3 \\ \sqrt{2}e^{\pi i(t-3) - i\frac{3\pi}{4}}, & 3 \leq t < 4. \end{cases}$$

(b) Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale.

(i)  $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz$ ,  $\gamma(t) := e^{int}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

(ii)  $\int_{\gamma} \bar{z}^2 dz$ ,  $\gamma$  die Verbindungsstrecke von 0 nach  $1 + i$ .

(iii)  $\int_{\gamma} \bar{z}^3 dz$ ,  $\gamma$  der Streckenzug  $[0, 1, i + 1]$ .

(iv)  $\int_{\gamma_a} \frac{1}{z - z_0} dz$ ,  
 $\gamma_a$  der Streckenzug  $[z_0 - a - ia, z_0 + a - ia, z_0 + a + ia, z_0 - a + ia, z_0 - a - ia]$   
mit  $a \in \mathbb{R}$ .

### Aufgabe 2K (10 Punkte)

Es seien  $D \subset \mathbb{C}$  offen,  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph und  $\gamma$  ein stückweise glatter geschlossener Weg in  $D$ . Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

ist eine rein imaginäre Zahl.

### Aufgabe 3 (mündlich)

Es sei  $p$  ein Polynom und  $\gamma$  die positiv orientierte Kreislinie  $|z| = R$  mit  $R > 0$ . Zeigen Sie:

$$\int_{\gamma} \overline{p(z)} dz = 2\pi i R^2 \overline{p'(0)}.$$

Bitte wenden!

**Aufgabe 4 (mündlich)**

- (a) Es sei  $r > 0$ , und  $\gamma$  bezeichne die positiv orientierte Kreislinie  $|z| = r$ . Berechnen Sie für alle  $m \in \mathbb{Z}$  das komplexe Kurvenintegral

$$\int_{\gamma} z^m dz.$$

- (b) Bestimmen Sie für alle  $n \in \mathbb{N}$  den Wert des reellen Integrals

$$\int_0^{2\pi} (\cos t)^{2n} dt,$$

indem Sie eine geeignet gewählte Funktion längs der Einheitskreislinie integrieren.

**Abgabe:** Bis Mittwoch, 30.5.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.