Lösung zu Teilen von Aufgabe 1 des 7. Übungsblattes

Es gilt:

$$\frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)} = z + \frac{z^3-1}{z^2(z^4-1)} = z + \frac{z^2-z+1}{z^2(z-1)(z+i)(z-i)}.$$

Wir machen den Ansatz

$$\frac{z^2-z+1}{z^2(z+1)(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z-1} + \frac{D}{z+i} + \frac{E}{z-i}.$$

Multiplizieren mit dem Nenner der linken Seite ergibt:

$$\begin{aligned} z^2+z+1 \quad = \quad & Az(z-1)(z+i)(z-i) + \\ & Bz^2(z-1)(z+i)(z-i) + \\ & Cz(z+i)(z-i) + \\ & Dz(z-1)(z-i) + \\ & Ez(z-1)(z+i). \end{aligned}$$

Wir setzen ein:

$$\begin{aligned} z=0 \quad & \Rightarrow \quad B=-1, \\ z=1 \quad & \Rightarrow \quad C=\tfrac{1}{2}, \\ z=-i \quad & \Rightarrow \quad D=-\tfrac{1}{4}(1-i), \\ z=i \quad & \Rightarrow \quad E=-\tfrac{1}{4}(1+i). \end{aligned}$$

Vergleich der Koeffizienten vor z^4 der rechten und linken Seite liefert damit also:

$$0 = Az^4 - z^4 + \frac{1}{2}z^4 - \frac{1}{4}(1-i)z^4 - \frac{1}{4}(1+i)z^4 = Az^4.$$

Also ist $A=0$.

Insgesamt ergibt sich:

$$\frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)} = z - \frac{1}{z^2} + \frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{4}(1-i)}{z-i} - \frac{\frac{1}{4}(1+i)}{z+i}.$$

Damit gilt jetzt:

$$\begin{aligned} & \int_{|z-1|=3} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)} dz \\ = & \underbrace{\int_{|z-1|=3} z dz}_{=0} - \underbrace{\int_{|z-1|=3} \frac{1}{z^2} dz}_{=0} + \underbrace{\int_{|z-1|=3} \frac{\frac{1}{2}}{z-1} dz}_{=\frac{1}{2}\cdot 2\pi i} - \underbrace{\int_{|z-1|=3} \frac{\frac{1}{4}(1-i)}{z-i} dz}_{=\frac{1}{4}\cdot 2\pi i(1-i)} - \underbrace{\int_{|z-1|=3} \frac{\frac{1}{4}(1+i)}{z+i} dz}_{=\frac{1}{4}\cdot 2\pi i(1+i)} \\ = & \ 0. \end{aligned}$$

Die auftretenden Integrale muss man dabei nicht „von Hand“ berechnen, sondern man benutzt den Cauchyschen Integralsatz und die Cauchysche Integralformel bzw. die Tatsache, dass die Funktion $z \mapsto \frac{1}{z^2}$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine Stammfunktion besitzt.

Noch leichter wird die Rechnung, wenn man über den Kreis $|z-1| = \frac{3}{2}$ integriert, da die Funktionen $z \mapsto \frac{1}{4}\frac{(1-i)}{z-i}$ und $z \mapsto \frac{1}{4}\frac{(1+i)}{z+i}$ im Inneren dieses Kreises holomorph sind.

Damit gilt also:

$$\begin{aligned}
&\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)} dz \\
&= \underbrace{\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} z dz}_{=0} - \underbrace{\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z^2} dz}_{=0} + \underbrace{\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{z-1} dz}_{=\pi i} - \underbrace{\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{4}(1-i)}{z-i} dz}_{=0} - \underbrace{\int_{|z-1|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{4}(1+i)}{z+i} dz}_{=0} \\
&= \pi i.
\end{aligned}$$