Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

30.5.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 7

Aufgabe 1K (10 Punkte)

(a) Berechnen Sie den Wert der folgenden Integrale:

$$\int_{|z-1|=3} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)}dz, \qquad \int_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{z^7+1}{z^2(z^4-1)}dz \qquad \int_{|z|=4} \frac{e^z}{z^2+2z}dz.$$

Der Integrationsweg soll dabei jeweils die positiv orientierte Kreislinie sein.

(b) Welche der folgenden Funktionen hat eine Stammfunktion? Begründen Sie ihre Antwort!

(i) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \bar{z}$,

(ii) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \mathrm{Re}(z)$,

(iii) $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto \cos(z)e^{i\sin(z)}$.

Aufgabe 2K (10 Punkte)

Es seien $G\subseteq\mathbb{C}$ ein Gebiet mit der Eigenschaft, dass jede holomorphe Funktion, die auf G definiert ist, eine Stammfunktion in G hat, und $f:G\to\mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $f(z)\neq 0$ für alle $z\in G$.

(a) Zeigen Sie, dass eine holomorphe Funktion $g:G\to\mathbb{C}$ existiert, so dass

$$f(z)=\exp(g(z))$$

für alle $z\in G$.

(b) Sei $G:=\mathbb{D}$ und $r\in\mathbb{R}$ mit $0<r<1$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-it}\log|f(re^{it})|dt=\frac{rf'(0)}{2f(0)}.$$

Aufgabe 3 (mündlich)

Es sei $f(z):=\frac{e^{iz}}{z}$, und der Weg γ sei der positiv orientierte Rand des Halbrings

$$\{z\in\mathbb{C}\,:\,r<|z|<R,\ \mathrm{Im}(z)>0\},$$

mit $0<r<R$. Berechnen Sie das Wegintegral $\int_\gamma f(z)dz$ und folgern Sie dann

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2},$$

indem Sie die Grenzübergänge $r\to 0$ und $R\to\infty$ betrachten.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (mündlich)

Es sei $R > 0$, und die Wege γ_1, γ_2 und γ_3 seien gegeben durch die Parametrisierungen

$$z_1(t) = t, \qquad z_2(t) = R + it, \qquad z_3(t) = t(1+t), \qquad \text{jeweils mit } 0 \le t \le R.$$

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\displaystyle\int_{\gamma_3} e^{-z^2} dz = \int_{\gamma_1} e^{-z^2} dz + \int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz.$

(b) Zeigen Sie mittels geeigneter Abschätzungen $\displaystyle\int_{\gamma_2} e^{-z^2} dz \stackrel{R\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$

(c) Berechnen Sie nun den Wert der sogenannten *Fresnelschen Integrale*

$$\int_0^\infty \sin(x^2) dx \quad \text{und} \quad \int_0^\infty \cos(x^2) dx,$$

indem Sie den Grenzübergang $R \to \infty$ betrachten und dabei (ohne Beweis) die Gleichung $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ verwenden.

Abgabe: Bis Mittwoch, 6.6.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.