

Funktionentheorie I – Übungsblatt 8

Aufgabe 1 (mündlich)

Welche der folgenden Funktionen haben in $z_0 = 0$ eine hebbare Singularität?

$$h_1(z) := \frac{z}{e^z - 1}, \quad h_2(z) := \frac{z^3}{e^z - 1}, \quad h_3(z) := \frac{1}{(e^z - 1)^2}, \quad h_4(z) := \frac{(e^z - 1)^2}{z}.$$

Setzen Sie, falls möglich, die Funktionen holomorph fort, und untersuchen Sie, ob in $z_0 = 0$ eine Nullstelle vorliegt. Bestimmen Sie auch deren Ordnung.

Aufgabe 2K (10 Punkte)

Sei f eine auf ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion mit Taylorentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

um den Ursprung.

- (a) Sei $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch $g(z) := e^z f(z)$. Zeigen Sie, dass die Taylorentwicklung von g um den Ursprung gegeben ist durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{(n-k)!} z^n.$$

- (b) Sei $f(z) := e^{e^z}$. Zeigen Sie, dass für die Folgenglieder a_n mit $n \geq 1$ gilt:

$$a_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k-1)!}.$$

Aufgabe 3K (10 Punkte)

Die Funktion f sei in einer Umgebung des Nullpunktes holomorph und erfülle dort

$$f(z^2) = f(z) - z \quad \text{und} \quad f(0) = 1.$$

- (a) Bestimmen Sie die Potenzreihenentwicklung von f um den Punkt $z_0 = 0$.
(b) Berechnen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe und zeigen Sie, dass alle Punkte auf dem Rand des Konvergenzkreises Singularitäten sind.

Bitte wenden!

Aufgabe 4 (mündlich)

Sei (f_n) eine Folge holomorpher Funktionen auf einem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$, und es gelte

$$f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f \text{ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von } G.$$

Zeigen Sie: f ist holomorph auf G , und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f^{(k)} \text{ gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von } G.$$

Studienbegleitende Prüfung

- Die studienbegleitende Prüfung zur Vorlesung Funktionentheorie 1 findet als Klausur statt.
 - **Termin:** Montag, 6. August 2007, 10-12 Uhr, im Hertz Hörsaal.
 - **Anmeldung:** Bitte melden Sie sich im Zeitraum vom 9. bis 21. Juli 2007 im Sekretariat in Zimmer 312 an (Sprechzeiten 9.30-11.30 Uhr!), wenn Sie an der Klausur teilnehmen wollen. Bringen Sie zur Anmeldung eine Kopie Ihrer Prüfungsberechtigung mit. Nach dem 21. Juli 2007 werden keine Anmeldungen mehr entgegengenommen.
-

Abgabe: Bis Mittwoch, 13.6.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.