Universität Karlsruhe
Institut für Analysis
Prof. Dr. Michael von Renteln
Dipl. Math. Oliver Bauer

13.6.2007

Funktionentheorie I – Übungsblatt 9

Aufgabe 1K (10 Punkte)

(a) Die Menge $T \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ bestehe aus unendlich vielen Punkten. Zeigen Sie: Es gibt keine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion f mit $f(z) = \bar{z}$ für alle $z \in T$.

(b) Gibt es eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ mit unendlich vielen Nullstellen?

Aufgabe 2K (10 Punkte)

(a) Seien D eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, L eine Gerade in $\mathbb{C}$ und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die in allen Punkten $z \in D$, die nicht auf L liegen, komplex differenzierbar ist. Zeigen Sie, dass f dann in ganz D holomorph ist.

(b) Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, das symmetrisch zur reellen Achse ist (d.h. $z \in G \Rightarrow \bar{z} \in G$) und diese schneidet.
Weiter seien $G_+ := \{z \in G : \operatorname{Im}(z) > 0\}$, $G_- := \{z \in G : \operatorname{Im}(z) < 0\}$, und $G_0 := \{z \in G : \operatorname{Im}(z) = 0\} = G \cap \mathbb{R}$.
Ist $f : G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C}$ stetig, auf G_+ holomorph und auf G_0 reellwertig, dann ist die durch

$$\tilde{f} := \begin{cases} \overline{f(\bar{z})}, & z \in G_- \\ f(z), & z \in G_+ \cup G_0 \end{cases}$$

definierte Funktion $\tilde{f} : G \to \mathbb{C}$ holomorph.

Aufgabe 3 (mündlich)

Es sei f eine ganze Funktion. Zeigen Sie:

(a) Ist f nicht konstant, so gibt es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ mit $f(z_n) \to a$.

(b) Ist f kein Polynom, so kann man in (a) die Folge derart wählen, dass $z_n \to \infty$ gilt.

(c) Gilt $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$, so ist f konstant.

Aufgabe 4 (mündlich)

Es sei $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Zeigen Sie die folgende Verallgemeinerung des Satzes von Liouville: Die holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist genau dann ein Polynom mit Grad $\leq n$, wenn positive Konstanten a und b existieren mit

$$|f(z)| \leq a + b|z|^n \text{ für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Abgabe: Bis Mittwoch, 20.6.2007, 14.00 Uhr in den Kasten bei Zimmer 308 des Mathematikgebäudes oder zu Beginn der Übung.

Studienbegleitende Prüfung

- Die studienbegleitende Prüfung zur Vorlesung Funktionentheorie 1 findet als Klausur statt.
- **Termin:** Montag, 6.August 2007, 10-12 Uhr, im Hertz Hï¿½saal.
- **Anmeldung:** Bitte melden Sie sich im Zeitraum vom 9. bis 21. Juli 2007 im Sekretariat in Zimmer 312 an (Sprechzeiten 9.30-11.30 Uhr!), wenn Sie an der Klausur teilnehmen wollen. Bringen Sie zur Anmeldung eine Kopie Ihrer Prüfungsberechtigung mit. Nach dem 21. Juli 2007 werden keine Anmeldungen mehr entgegengenommen.