Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
24.07.2012

Funktionentheorie
Exam
Solutions

Problem 1(a) and (b) together:

(1)

$$u_x = 3x^2 - 3y^2, \qquad u_y = -6xy,$$
$$u_{xx} = 6x, \qquad u_{yy} = -6x.$$

Since we have $u_{xx} + u_{yy} = 0$, i.e. u is harmonic, we can conclude that there is an analytic function f with $Ref = u$.

By Cauchy-Riemann's equations we have that

$$v_y = u_x = 3x^2 - 3y^2 \Rightarrow v(x,y) = \int (3x^2 - 3y^2)dy = 3x^2 - y^3 + c(x).$$

Using the other Cauchy-Riemann's equation $u_y = -v_x$, we get

$$c'(x) = 0 \quad \Rightarrow c(x) = const := c.$$

Thus

$$f(x,y) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2 - y^3 + c) = (x+iy)^3 + ic$$
$$f(z) = z^3 + ic$$

Since $f(1) = 0$, we get $c = i$. But since $v : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $c = i \notin \mathbb{R}$ we conclude that there is no holomorphic function $f = u + iv$ with $f(1) = 0$.

(2)

$$u_x = -\frac{y}{x^2} exp\Big(\frac{y}{x}\Big), \qquad u_y = \frac{1}{x} exp\Big(\frac{y}{x}\Big),$$
$$u_{xx} = \Big(\frac{y^2}{x^4} + \frac{2y}{x^3}\Big) exp\Big(\frac{y}{x}\Big), \qquad u_{yy} = \frac{1}{x^2} exp\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

Since we have $u_{xx} + u_{yy} \neq 0$, i.e. u is not harmonic, we can conclude that there is no analytic function f with $Ref = u$.

Problem 2

(a) Using the Cauchy integral theorem we get

$$I_k = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^z}{z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_k} \frac{e^z(z^2 - 3z + 3)}{(z-1)^3} dz$$
$$= n(C_k, 0) e^z \Big|_{z=0} - n(C_k, 1) \frac{1}{2!} D^2\big(e^z(z^2 - 3z + 3)\big)\Big|_{z=1}$$

Therefore

$$I_1 = 2 - \frac{1}{2}e,$$
$$I_2 = -1 - \frac{1}{2}e.$$

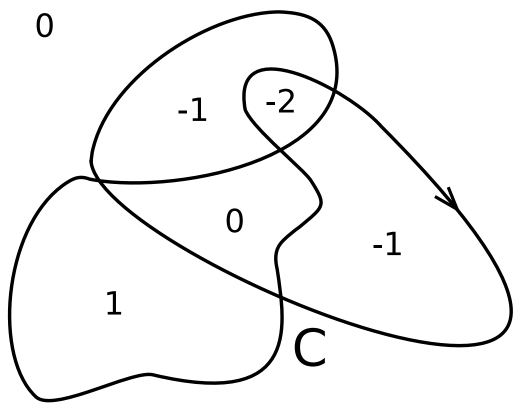
Alternative solution: Since $z = 0$ is a simple pole and $z = 1$ is a pole of order 3, using the Residue theorem, we get

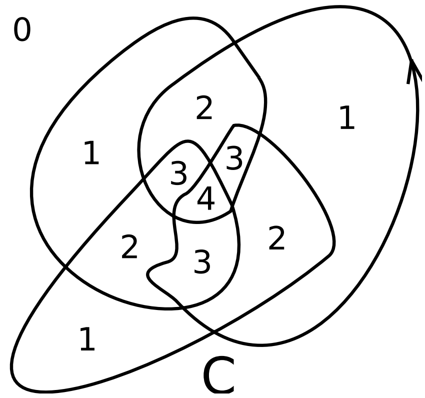
$$\begin{aligned}
I_k &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_k} \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz = n(C_k,0)Res\Big(\frac{e^z}{z(1-z)^3},0\Big) + n(C_k,1)Res\Big(\frac{e^z}{z(1-z)^3},1\Big) \\
&= n(C_k,0)\frac{\frac{e^z}{(1-z)^3}\Big|_{z=0}}{1} + n(C_k,1)\frac{1}{2!}\lim_{z\to 1} D^2\Big((z-1)^3\frac{e^z}{z(1-z)^3}\Big) \\
&= n(C_k,0)\cdot 1 - n(C_k,1)\frac{1}{2}e.
\end{aligned}$$

Therefore

$$I_1 = 2 - \frac{1}{2}e,$$
$$I_2 = -1 - \frac{1}{2}e.$$

(b)





Problem 3

$$M(A) = Z, \qquad M(B) = X, \qquad M(C) = Y,$$
$$M(D) = W, \qquad M(E) = U, \qquad M(F) = V,$$

Funktionentheorie Klausur 24/7/2012 Lösungen

Aufgabe 4a)

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ ist die Potenzreihe für $f(z) = \dfrac{\sin z}{z-1-i}$

um $z_0 = 0$. Diese Reihe konvergiert in dem größten Kreis um 0, in dem f holomorph ist. Da in $z = 1+i$ eine Polstelle vorliegt, ist der Konvergenzradius $r = |1+i| = \sqrt{2}$.

Aufgabe 4b) Nach Vor ist z_0 eine isolierte Singularität von f.

„⇒" Es sei z_0 eine Polstelle der Ordnung $k\,(\in\mathbb{N})$.
Nach Aufgabe 3, 13. Üblatt, gilt mit einer positiven Konstanten C_1 für ein geeignetes $\rho > 0$:

$$\frac{C_1}{|z-z_0|^k} \le |f(z)| \quad , \quad 0<|z-z_0|<\rho$$

d.h. $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$

„⇐" $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ bedeutet: Zu jeder Zahl $M > 0$

(*) $\left\{ \begin{array}{l} \text{gibt es eine Zahl } \varepsilon > 0 \text{, so dass } |f(z)| \ge M \text{ gilt für alle} \\ z \in D'(z_0,\varepsilon) = \{ z \,/\, 0<|z-z_0|<\varepsilon \}. \end{array} \right.$

1/ D.h., dass f bei z_0 unbeschränkt ist. z_0 kann somit keine hebbare Singularität sein.

2/ Wäre z_0 eine wesentliche Singularität, so müsste das Bild jeder punktierten Umgebung von z_0 in $\mathbb{C}$ dicht liegen. Das ist nicht der Fall: gemäß (*) gilt $f(D'(z_0,\varepsilon)) \cap D(0,\frac{M}{2}) = \emptyset$.

3/ Somit muss z_0 eine Polstelle von f sein.

Funktionentheorie Klausur 24/7/2012 Lösungen

Aufgabe 5 a) Es sei $D = D(0,1)$. Die Vor ist $f \in H(D) \cap C(\overline{D})$ (1)

und $f(z) = 0$ für $z \in \partial D \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq 0\}$. (2)

1. Betrachte: $g(z) = f(z) f(-z)$ für $z \in \overline{D}$. Es gilt

$g(z) = g(-z)$ und deshalb mit (2): $g(z) = 0$, $z \in \partial D$ (3)

Aus (1) und (3) folgt mit dem Maxprinzip: $g(z) = 0$, $|z| \leq 1$ (4)

2. Angenommen, es gibt ein $z_0 \in D$ mit $f(z_0) \neq 0$. Da f in D stetig ist, gibt es ein $r > 0$, so dass $D(z_0, r) \subset D$ und $f(z) \neq 0$ für $z \in D(z_0, r)$ gilt. Mit (4) und der Def von g folgt: $f(z) = 0$ für $z \in D(-z_0, r)$ $(\subset D)$. Mit dem Identitätssatz folgt: $f(z) = 0$ für $z \in D$. Das ist ein Widerspruch zu $f(z_0) \neq 0$. Es gilt also $f(z) = 0$ für $z \in D$ und da $f \in C(\overline{D})$ folgt auch $f(z) = 0$, $z \in \overline{D}$.

Aufgabe 5 b) Mit $w = \sqrt[n]{z} = \exp\left(\frac{1}{n}(\ln|z| + i\arg(z))\right)$, $-\pi < \arg z < \pi$,

folgt, dass $\{z \mid -\frac{\pi}{n} < \arg(z) < \frac{\pi}{n}\}$ abgebildet wird

auf $\{w \mid -\frac{\pi}{n^2} < \arg(w) < \frac{\pi}{n^2}\}$

Aufgabe 5 c) $f(z) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ ist konvergent für alle z.

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{z}\right) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}, \quad |z| > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{f(z) + f(\frac{1}{z})}{z^n} = \frac{2a_0}{z^n} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{-k-n} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k z^{k-n}$$

Man liest ab:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z) + f(\frac{1}{z})}{z}; 0\right) = 2a_0$$

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z) + f(\frac{1}{z})}{z^n}; 0\right) = a_{n-1} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Funktionentheorie Klausur 24/7/2012 Lösungen

Aufgabe 6

f ist holomorph in den folgenden Kreisringen um $z_0 = i$:

$$A_1 = \{ z \,/\, |z-i| < 1 \}$$
$$A_2 = \{ z \,/\, 1 < |z-i| < 2 \}$$
$$A_3 = \{ z \,/\, |z-i| > 2 \}$$

$-\frac{i}{2}$ liegt in A_2: Es ist die Laurent Reihe um i gesucht, die in A_2 konvergiert. Es sei $z \in A_2$:

$$f(z) = \frac{5}{z+i} + \frac{i}{z(z+i)} = \frac{5}{z+i} - \frac{1}{z+i} + \frac{1}{z}$$

$$= \frac{4}{z+i} + \frac{1}{z} = \frac{4}{2i\left(1+\frac{z-i}{2i}\right)} + \frac{1}{(z-i)\left(1+\frac{i}{z-i}\right)}$$

$$= \underbrace{\frac{2}{i}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2i)^k}(z-i)^k}_{\text{konvergent für } |z-i|<2} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k i^k (z-i)^{-k-1}}_{\text{konvergent für } |z-i|>1}$$

$$= \underline{\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{2^{1-k}}{i^{k+1}}(z-i)^k + \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1} i^{k-1}(z-i)^{-k}}$$

$$= \underline{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z-i)^k} \qquad \underline{\text{konvergent für } z \in A_2}$$

mit $\underline{a_{-k} = (-1)^{k-1} i^{k-1} \quad , k = 1, 2, \ldots}$

und $\underline{a_k = (-1)^k \frac{2^{1-k}}{i^{k+1}} \quad , k = 0, 1, 2, \ldots}$