Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
19.06.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 10

Aufgabe 1 (C) (10 Punkte)

(a) Sei $f \neq konst$, holomorph mit $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$. Zeigen Sie: Dann hat man die Abschätzung

$$\frac{|f(0)| - |z|}{1 - |f(0)||z|} \leq |f(z)| \leq \frac{|f(0)| + |z|}{1 + |f(0)||z|} \qquad \text{für alle } |z| < 1\,.$$

Hinweise:

(1) Betrachten Sie die Funktion $g(z) = \frac{f(z)-a}{1-\bar{a}f(z)}$ mit $a = f(0)$.

(2) Sie dürfen ohne Begründung verwenden

$$\frac{|b| - |d|}{1 - |b||d|} \leq \frac{|b + d|}{|1 + \bar{b}d|} \leq \frac{|b| + |d|}{1 + |b||d|} \quad \text{für } |b| < 1, |d| < 1.$$

(b) Sei $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Gibt es eine holomorphe Funktion $f : D \to D$, für die $f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$ und $f'(\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$ gelten? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 Sei f eine ganze Funktion mit

$$|f(z)| \leq \frac{1}{|Imz|} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

Zeigen Sie, dass $f \equiv 0$.

Aufgabe 3 (Schwarzsches Spiegelungsprinzip) Sei $G \neq \emptyset$ ein zur reellen Achse symmetrisches Gebiet, d.h. $z \in G \Leftrightarrow \overline{z} \in G$.

Wir setzen $G_+ := \{z \in G : \text{Im} z > 0\}$, $G_- := \{z \in G : \text{Im} z < 0\}$ und $G_0 := \{z \in G : \text{Im} z = 0\}$. Weiter sei $f : G_+ \cup G_0 \to \mathbb{C}$ stetig, $f_{|G_+}$ holomorph und $f(G_0) \subset \mathbb{R}$.

Beweisen Sie, dass dann die durch $\tilde{f}(z) := \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \in G_+ \cup G_0 \\ \overline{f(\overline{z})} & \text{falls } z \in G_- \end{cases}$ definierte Fortsetzung von f auf G holomorph ist.

Aufgabe 4 (C) (10 Punkte) Berechnen Sie jeweils das Wegintegral $\displaystyle\int_\gamma \frac{1}{z} dz$ für den skizzierten Rundweg γ.