Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Analysis
Dr. A. Müller-Rettkowski
M. Sc. S. Avramska

SS 2012
26.06.2012

Funktionentheorie
Übungsblatt 11

Aufgabe 1 Beweisen Sie für Funktionenfolgen (f_n) die folgende Aussage: Sind die Funktionen $f_1, f_2, \ldots$ holomorph in einem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$, und gilt

$$f_n \xrightarrow{n\to\infty} f \quad \text{gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von } G,$$

so ist auch f holomorph in G, und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_n^{(k)} \xrightarrow{n\to\infty} f^{(k)} \quad \text{gleichmäßig auf jeder kompakten Teilmenge von } G\,.$$

Aufgabe 2 (C) (10 Punkte)

(a) Es sei f eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion, die nicht konstant ist. Beweisen Sie, dass es zu jedem $a \in \mathbb{C}$ eine Folge (z_n) in $\mathbb{C}$ gibt, für die $f(z_n) \to a$ gilt.

(b) Es sei f eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit $f(z) \notin \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass f konstant ist.

(c) Es sei f eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion. Zu jedem Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ gebe es in der Potenzreihenentwicklung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ von f um z_0 mindestens einen Koeffizienten a_n, der Null ist. Beweisen Sie, dass f ein Polynom sein muss.

Aufgabe 3 (C) (10 Punkte) Es sei $\gamma(t) = 1 + e^{it}$ mit $0 \le t \le 2\pi$. Berechnen Sie

$$\int\limits_\gamma \left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Aufgabe 4 Seien γ ein stückweise stetiger Weg und φ eine Funktion, die definiert und stetig auf $|\gamma|$ ist. Für $m \ge 1$ sei

$$F_m(z) = \int\limits_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w-z)^m} dw, \quad z \notin |\gamma|.$$

Zeigen Sie, dass F_m in $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$ holomorph ist und

$$F_m'(z) = mF_{m+1}(z).$$